Segundo parcial de Matemática Discreta 1

Martes 28 de noviembre de 2017

Ejercicios de desarrollo (total 35 puntos).

1. **a.** Probar que no hay grafos 3-regulares con una cantidad impar de vértices.

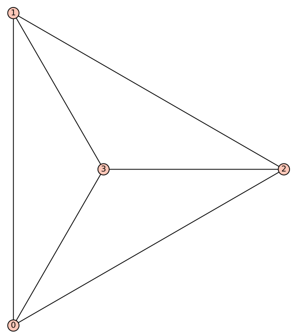
Solución: Para cualquier grafo $G = (V, E)$ sabemos que

$$\sum_{v \in V} \operatorname{gr}(v) = 2|E|.$$

Si es k-regular entonces $\operatorname{gr}(v) = k$ para todo $k \in V$, por lo tanto $\sum_{v \in V} \operatorname{gr}(v) = k|V| = 2|E|$, por lo tanto no puede pasar que $k = 3$ y $|V|$ sea impar.

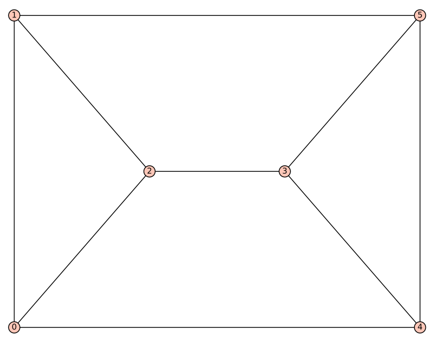
b. Encontrar y representar gráficamente un grafo 3-regular, conexo y planar con 4 vértices.

Solución:



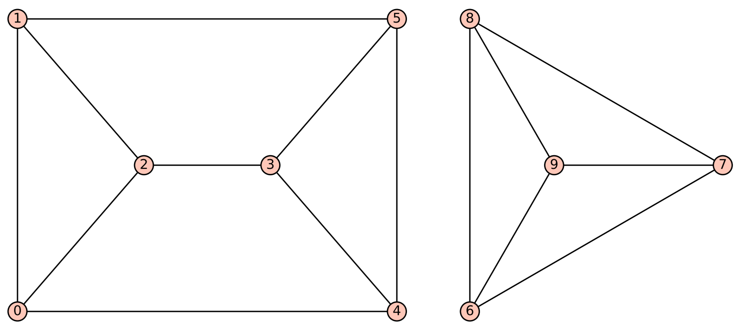
c. Encontrar y representar gráficamente un grafo 3-regular, conexo y planar con 6 vértices.

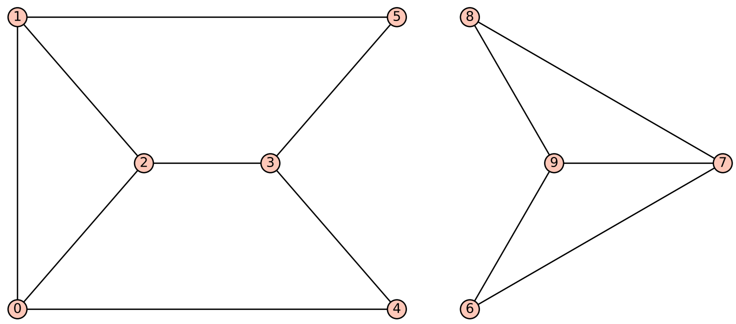
Solución:

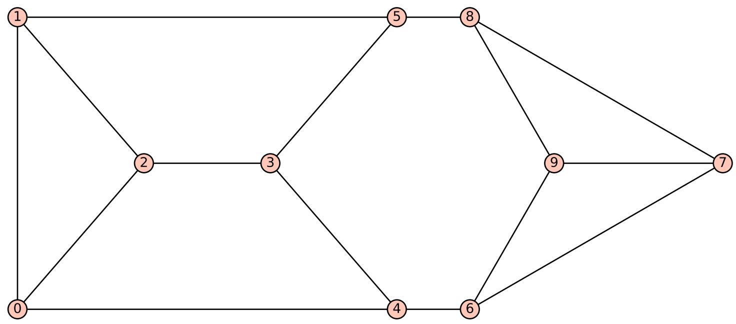


d. Encontrar y representar gráficamente un grafo 3-regular, conexo y planar con 10 vértices.

Solución: Para construir un grafo con estas carecterísticas podemos utilizar los grafos de las dos partes anteriores. Procedemos de la siguiente manera: a los dos grafos le eliminamos una arista que limite a la parte infinita del plano, luego unimos los dos grafos agregando aristas entre los vértices libres de los dos grafos anteriores. En la siguientes figuras se muestra el proceso de manera gráfica.







e. Probar que existen grafos 3-regulares, conexos y planares con $2n$ vértices para todo $n \geq 2$ (se sugiere usar inducción completa).

Solución: En la parte anterior vimos como construir un grafo 3-regular, planar y conexo de 10 vértices a partir de uno con las mismas propiedades pero con 4 vértices y otro con 6 vértices. Este mismo proceso nos da uno de 8 vértices y las propiedades pedidas a partir de dos de 4. Luego, ya tenemos armados gradfos con 4, 6, 8 y 10 vértices. Como todo número par de vértices $2n = 4 + 4 \times t$, o $2n = 6 + 4 \times t$, para algún $t \in \mathbb{N}$, el mismo procedimento descrito arriba se puede generalizar por inducción en n.

2. Se considera una relación de orden parcial $(X, \ll)$, en el conjunto finito X. Asúmase que el largo máximo de una cadena en X es cinco y no hay anticadenas con seis elementos.

a. ¿El orden parcial $(X, \ll)$ tiene elementos maximales? *Justificar.*

Solución: Como el conjunto X es finito, todo orden parcial en un conjunto finito tiene elementos maximales (Proposición de teórico).

b. ¿Puede tener $(X, \ll)$ siete elementos minimales?

Solución: El conjunto de elementos minimales forma una anticadena. Si hubiera siete elementos minimales, habría anticadenas con siete, y por lo tanto también con seis elementos.

c. Se consideran los siguientes grafos: $G = (X, E)$ el grafo **orientado** que representa la relación de orden parcial $(X, \ll)$ y $H = (X, A)$ el diagrama de Hasse que representa el mismo orden parcial. Demostrar que $|E| \geq |A| + 10$.

Solución: Como el grafo dirigido G está definido a partir de un orden parcial, recordando que un orden parcial debe cumplir la propiedad reflexiva, en cada vértice dado por los elementos de X en la cadena de cinco elementos, ha de haber un lazo. Éstos no figuran, por definición, en el conjunto A de aristas de H. Por otro lado, la misma cadena de cinco elementos (cuatro aristas) definen seis aristas más en el grafo G: tres por la concatenación de aristas de a dos; dos más por la concatenación de aristas de a tres; una más por la concatenación de las cuatro aristas.

Ejercicios de múltiple opción

1. La cantidad de relaciones de equivalencia $\mathcal{R}$ en el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $\#[0] = \#[4] = 4$, $(0, 2) \in \mathcal{R}$ y $(4, 5) \notin \mathcal{R}$ es:

A. 4. **C.** 10. **E.** 44.

B. 64. **D.** 52.

Solución: Se generan cuatro casos cuando el $0, 2$ y 5 están en la misma clase de equivalencia (y por lo tanto el 4 está en la otra clase de equivalencia que tendrá también cuatro elementos). Se dan 60 casos más cuando el 0 y el 4 comparten la clase de equivalencia (de cuatro elementos). Necesariamente el 2 también estará en la misma clase. Para el cuarto elemento de esa clase hay 4 posibilidades (pues el 5 no puede estar allí). Ahora bien, definido el cuarto elemento de esa clase, los otros cuatro pueden formar una clase de quivalencia (cuatro elementos — un caso), dos clases de equivalencia (dos y dos elementos — 2 casos, o tres y un elementos — 4 casos), tres clases de equivalencia (dos, uno y un elementos — 6 casos), o cuatro clases de equivalencia (uno, uno, uno y un elementos — 1 caso). En total $4 + 4 \times 15 = 64$ casos. Luego, la solución correcta es la **B**.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo con las siguientes características:

- Tiene recorrido euleriano.
- $gr(v) \leq 4 \ \forall v \in V$.
- Tiene exactamente un vértice de grado 3 y cinco de grado 2.
- Tiene dos aristas tal que si se le sacan se obtiene un árbol.

Indique la opción correcta:

A. El grafo G tiene un vértice de grado 1 y uno de grado 4.

B. En G no hay ciclos.

C. El grafo G tiene circuito euleriano.

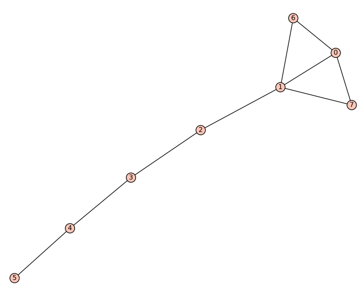
D. En G no hay vértice de grado 1.

E. No existe un grafo con esas características.

Solución: Como hay un vértice de grado 3, pero hay un recorrido euleriano, entonces hay uno y solo un vértice más de grado impar. Como todos los vértices tienen grado menor o igual que 4, y no puede haber más vértices de grado 3, entonces el otro vértice es de grado 1. O sea hay exactamente un vértice de grado 1, exactamente un vértice de grado 3 y exactamente cinco vértices de grado 2. Caben las preguntas: ¿hay vértices de grado 0?; ¿hay vértices de grado 4? Como la letra dice que al quitar dos aristas se obtiene un árbol, el grafo tiene que ser conexo. Por ende no puede haber vértices aislados, es decir no hay vértices de grado cero. Por otro lado sabemos que $1 \times 1 + 5 \times 2 + 1 \times 3 + x \times 4 = 2e$ siendo e el número de aristas. Pero también sabemos que si sacamos 2 aristas se obtiene un árbol. Por lo tanto $(e - 2) + 1 = v$, siendo v el número de vértices. Sabemos que $v = 1 + 5 + 1 + x = 7 + x$. Entonces obtenemos que $e - 1 = 7 + x$, o sea $e = 8 + x$. Luego, resolvemos las ecuaciones y obtenemos

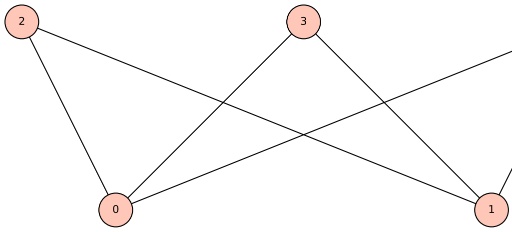
$$x = 1, e = 9, v = 8.$$

Por último cabe la pregunta si hay algún grafo con esas características. Incluimos la representación de un tal grafo:



Luego, la solución correcta es la **A**.

3. Dado el grafo de la siguiente figura y $n = 2k$, con $k \geq 1$. ¿Cuántos caminos de largo n hay entre los vértices 0 y 1?



A. $3^k 2^k - 3$. **C.** $3^n 2^{n-1}$. **E.** 3^k.

B. $3^k 2^{k-1}$. **D.** $2^n - 1$.

Solución: Como estamos delante del grafo bipartito completo $K_{2,3}$, un camino de largo $n = 2k$ queda determinado por todas las elecciones posibles de vértices entre 0 y 1, alternando la elección entre $\{2, 3, 4\}$ y $\{0, 1\}$. Si el camino es de largo $n = 2k$ en el medio tenemos que elegir k veces en el conjunto $\{2, 3, 4\}$ y $k - 1$ veces en el conjunto $\{0, 1\}$. En total $3^k 2^{k-1}$ posibilidades, o sea la opción **B**.

4. Sea $G = (V, E)$ grafo plano con $|V| = 5$ y $|E| = 8$. Si $3 \leq \text{gr}(v) \leq 4$ para todo $v \in V$ y r es la cantidad de regiones del determinadas por G (incluyendo la de área infinita), entonces:

A. La cantidad de regiones $r = 7$.

B. El grafo G determina cinco regiones limitadas por tres aristas cada una.

C. Todas las regiones están limitadas por tres aristas, excepto una que está limitada por cuatro aristas.

D. No tiene ciclo hamiltoniano.

E. Tres vértices tienen grado 4 y dos vértices tienen grado 3.

Solución: Como $3 \leq gr(v)$ para todo $v \in V$, como $|V| = 5$ entonces, por uno de los últimos teoremas del curso, sabemos que existe un ciclo hamiltoniano. En particular el grafo es conexo. Luego vale el Teorema de Euler: $|V| - |E| + r = 2$. O sea que hay $r = 5$ regiones. Como el grafo es plano vale que: $\sum_R gr(R) = 2 \times |E|$, siendo $gr(R)$ el número de aristas que limitan cada región R. Obsérvese que $gr(R) \geq 3$, para toda región R, pues para definir una región se precisan al menos tres aristas. Luego $\sum_{i=1}^{i=5} gr(R_i) = 2 \times 8 = 16$, con $gr(R) \geq 3$, para toda región R. La única posibilidad es que haya cuatro regiones de grado 3 y una región de grado 4. Obsérvese que la opción E no es posible pues $3 \times 4 + 2 \times 3 = 18 \neq 2 \times |E|$. O sea la única opción correcta es la **C**.