Soluciones del segundo parcial de Matemática Discreta 1.

Miércoles 29 de junio de 2016.

Desarrollo I (14 puntos)

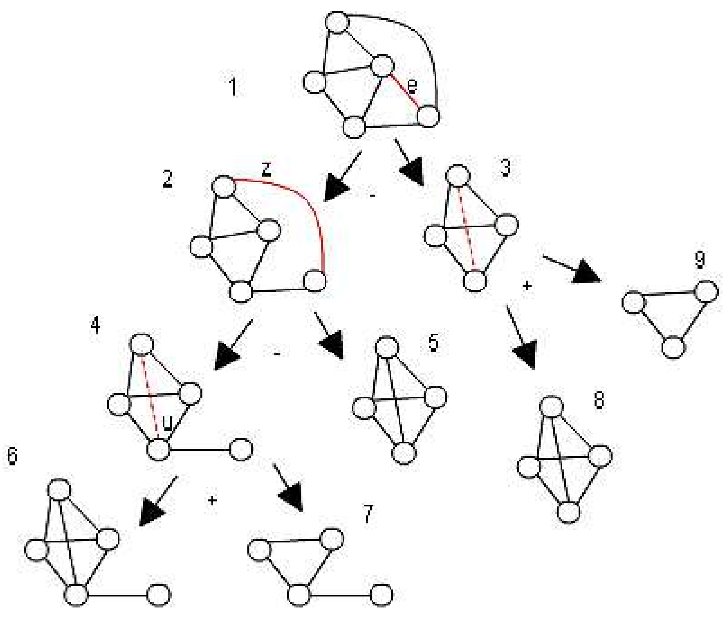
Dado el grafo W_4,

1. Hallar el polinomio cromático $P(W_4, \lambda)$.
2. Hallar el número cromático $\chi(W_4)$.
3. Hallar todas las distintas coloraciones posibles de W_4 con 2 y 3 colores.

Solución

Se aplican dos teoremas de descomposición del polinomio cromático, uno eliminando una arista y otro agregando una arista (ver figura). La línea roja punteada no forma parte del subgrafo respectivo, sino que indica que se va a agregar esa arista.

a)



$P(9, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$
$P(8, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$
$P(7, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$
$P(6, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3)$
$P(5, \lambda) = P(K_4, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

$P(4,\lambda) = P(6,\lambda) + P(7,\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$
$P(3,\lambda) = P(8,\lambda) + P(9,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$
$P(2,\lambda) = P(4,\lambda) - P(5,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+5)$
$P(W_4,\lambda) = P(2,\lambda) - P(3,\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+7)$

b) Evaluando en el polinomio cromático vemos que $\chi(W_4) = 3$, ya que para $\lambda < 3$ se anula el polinomio.

c) $P(W_4, 2) = 0$. $P(W_4, 3) = 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$.

Desarrollo II (14 puntos)

Demuestre que todo subconjunto finito no vacío de un retículo tiene un supremo y un ínfimo.
Sugerencia: Haga inducción en la cantidad de elementos del subconjunto.

Demostración

Por inducción, sea la propiedad $P(n)$: todo subconjunto no vacío de n elementos de un retículo tiene un supremo y un ínfimo.

Paso base: la propiedad es cierta para $n = 1$, pues para todo conjunto unitario $\{x\}$, el supremo y el ínfimo es x.

Paso inductivo: supongamos que $P(k)$ es cierta. Sea S un conjunto de $k+1$ elementos. Sean $x \in S$ y $S' = S - \{x\}$. Como S' tiene k elementos, por la hipótesis inductiva tiene supremo e ínfimo digamos y y a, respectivamente. Como estamos en un retículo, existen elementos $z = \sup(x, y)$ y $b = \inf(x, a)$. Habremos terminado la demostración si podemos demostrar que z es el supremo de S y b el ínfimo de S. Para demostrar que z es el supremo de S, observemos en primer lugar que si $w \in S$, entonces o bien $w = x$ o bien $w \in S'$. Si $w = x$ entonces $w \leq z$ ya que z es el supremo de x e y. Si $w \in S'$ entonces $w \leq z$, porque $w \leq y$, ya que y es el supremo de S' e $y \leq z$, ya que $z = \sup(x, y)$. Para ver que z es el supremo de S, supongamos que u es una cota superior de S. Nótese que tal elemento u tiene que ser una cota superior de x y de y, pero como $z = \sup(x, y)$, se sigue que $z \leq u$. Omitimos el argumento análogo que demuestra que b es el ínfimo de S.

Los problemas del 1 al 4 son de múltiple opción (total 32 puntos). Correcta: 8 puntos, Incorrecta: -2 punto, sin responder: 0 punto.

1. En el grafo $K_{3,n}$, hay A ciclos de largo 4, B ciclos de largo 5 y C ciclos de largo 6. Determine A, B y C.

(A) A=$\binom{n}{2} \times \binom{3}{2}$, B=0, C=$\binom{n}{3} \times 6$

(B) A=$\binom{n}{2} \times \binom{3}{2} \times 2$, B=$\binom{n}{2} \times \frac{5!}{10}$, C=$\binom{n}{3} \times 12$

(C) A=$\binom{n}{2} \times \binom{3}{2} \times 2$, B=0, C=$\binom{n+3}{3} \times 12$

(D) A=$\binom{n}{2} \times \binom{3}{2}$, B=0, C=$\binom{n+3}{3} \times 6$

(E) A=$\binom{n}{2} \times \binom{3}{2} \times 4$, B=0, C=$\binom{n}{3} \times 12$

Solución
Claramente se ve que no existen ciclos de largo 5, por lo que B=0. Para largo 4, tenemos que elegir dos vértices en cada subconjunto de vértices del bipartito $K_{3,n}$, y eso lo hacemos de $\binom{n}{2} \times \binom{3}{2}$ luego permutamos los 2 vértices en cada conjunto, y dividimos entre $4 = 2 \times 2$ para quitar rotaciones y reversos, por lo tanto solo hay $\binom{n}{2} \times \binom{3}{2}$ ciclos de largo 4. Observamos que no hay "n" rotaciones, sino $\frac{n}{2}$ ya que estamos en un grafo bipartito. Análogamente elegimos 6 vértices, para los ciclos de largo 6 y consideramos todos los ciclos permutando los dos conjuntos de vértices, y dividiendo entre 2 (quitar reversos) y entre $\frac{6}{2} = 3$ (quitar rotaciones): $\binom{n}{3} \times \frac{3! \times 3!}{3 \times 2} = \binom{n}{3} \times 6$. Por lo que la respuesta correcta es la A.

2. Sea $A = \mathbb{N} - \{1\}$ y R la relación sobre A dada por $(x, y) \in R$ si, y solo si, $\text{mcd}(x, y) \geq 2$. Sea $B = \mathbb{R}$ y S la relación sobre B dada por $(x, y) \in S$ si, y solo si, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2^n y$. Señale la respuesta correcta.

(A) R y S son relaciones de equivalencia.

(B) R es de equivalencia pero S no lo es.

(C) R no es de equivalencia pero S si lo es.

(D) R y S no son relaciones de equivalencia.

(E) Ninguna de las anteriores.

Solución
R no es de equivalencia pues no es transitiva. $(2, 6) \in R$ pues $\text{mcd}(2, 6) = 2 \geq 2$, $(6, 3) \in R$ pues $\text{mcd}(6, 3) = 3 \geq 2$, pero $(2, 3) \notin R$ pues $\text{mcd}(2, 3) = 1 < 2$.
S es de equivalencia. Es reflexiva, pues si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x = 2^0 x$. Luego, $(x, x) \in S$. Es simétrica porque $x = 2^n y$ para $n \in \mathbb{Z}$ si, y solo si, $y = 2^{-n} x$. Es transitiva porque $x = 2^n y$ y $y = 2^m z$ para $n, m \in \mathbb{Z}$ implica $x = 2^{n+m} z$. La respuesta correcta es la C.

3. Dado el grafo G de la figura, señale la respuesta correcta.

(A) G es plano y tiene 7 regiones.

(B) G es plano y tiene 8 regiones.

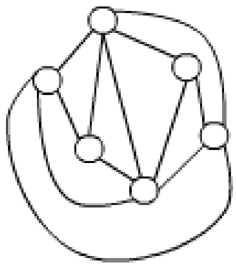
(C) G tiene solo un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$.

(D) G tiene solo un subgrafo homeomorfo a K_5.

(E) G tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ y un subgrafo homeomorfo a K_5.

Solución

El grafo de la figura es una inmersión plana de G,



Observemos que tiene 7 regiones finitas y 1 infinita, por lo tanto la respuesta correcta es la B.

4. Sean G_1, G_2 y G_3 grafos con matrices de adyacencia
A(G_1)=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ A(G_2)=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ A(G_3)=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ respectivamente. Señale la respuesta correcta.

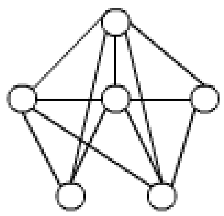
(A) G_1 y G_2 son isomorfos.

(B) G_2 y G_3 son isomorfos.

(C) G_1 y G_3 son isomorfos.

(D) G_1, G_2 y G_3 son isomorfos.

(E) Ninguna de las anteriores.



Solución

Es fácil ver que el grado de un vértice se obtiene sumando los elementos de la fila respectiva en la matriz de adyacencia. Entonces:

- Matriz $A(G_1)$: $gr(u_1) = 2$; $gr(u_2) = 2$; $gr(u_3) = 1$; $gr(u_4) = 1$
- Matriz $A(G_2)$: $gr(v_1) = 3$; $gr(v_2) = 2$; $gr(v_3) = 3$; $gr(v_4) = 2$
- Matriz $A(G_3)$: $gr(w_1) = 2$; $gr(w_2) = 3$; $gr(w_3) = 3$; $gr(w_4) = 2$

No se puede establecer un isomorfismo entre G_1 y G_2, ni entre G_1 y G_3, ya que no se pueden hacer corresponder los grados de los vértices. Por otro lado se puede establecer un isomorfismo entre G_2 y G_3 mediante la función f que cumple que $f(v_1) = w_2$, $f(v_2) = w_1$, $f(v_3) = w_3$, $f(v_4) = w_4$.

Por lo tanto la respuesta correcta es la B.