Matemática Discreta I (2014)
Solución del segundo parcial

Ejercicio 1. Se considera la sucesión definida por la relación de recurrencia

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = 4^n \qquad (n \geq 0)$$

con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Entonces $a_n = \ldots$.

Solución. La ecuación característica es $r^2 - 2r - 8 = 0$, que tiene raices $r = -2$ y $r = 4$. Por lo tanto la solución general a la ecuación homogénea es

$$c_1\,(-2)^n + c_2\,4^n\ .$$

Ahora buscamos una solución particular a la ecuación no homogénea; como 4^n es solución de la homogénea buscamos una solución de la forma $An\,4^n$. Sustituyendo la expresión en la ecuación no homogénea resulta

$$A(n+2)\,4^{n+2} - 2A(n+1)\,4^{n+1} - 8An\,4^n = 4^n\ ,$$

que se simplifica como $24A\,4^n = 4^n$. Luego $A = \frac{1}{24}$, y la solución general a la ecuación no homogénea es

$$c_1\,(-2)^n + c_2\,4^n + \frac{1}{24}n\,4^n\ .$$

Ahora consideramos las condiciones iniciales

$$a_0 = c_1 + c_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad a_1 = -2c_1 + 4c_2 + \frac{4}{24} = 1\ .$$

Resolviendo el sistema tenemos $c_1 = -\frac{5}{36}$ y $c_2 = \frac{5}{36}$, y por lo tanto la solución es

$$a_n = (\frac{1}{24}n + \frac{5}{36})4^n - \frac{5}{36}(-2)^n\ .$$

Ejercicio 2. Se considera un conjunto A cualquiera (finito o infinito) con una relación $\mathcal{R}$ de orden total en A. Considerar la validez de las siguientes afirmaciones:

I. Todo elemento maximal de A es un máximo.
II. A tiene al menos un elemento minimal.
III. A tiene a lo sumo un elemento minimal.
IV. A es un retículo.

Solución.

I. Sea $a \in A$ un elemento maximal. Dado otro elemento $b \in A$, como $\mathcal{R}$ es un orden total, a y b están relacionados. Pero como a es maximal, no puede ser $a\mathcal{R}b$ entonces necesariamente $b\mathcal{R}a$. Por lo tanto a es máximo.

II. La afirmación es falsa, por ejemplo $\mathbb{Z}$ con el orden total $\leq$ no tiene elementos minimales.

III. Igual que (I) se prueba que todo elemento minimal es un mínimo. Como sabemos que hay a lo sumo un mínimo, se deduce que hay a lo sumo un elemento minimal.

IV. Dados dos elementos $a, b \in A$, como $\mathcal{R}$ es un orden total, a y b están relacionados, y se sigue que $\{a, b\}$ tiene supremo e ínfimo. Por lo tanto A es un retículo.

En suma: I, III y IV son verdaderas; II es falsa.

Ejercicio 3. Sea N la cantidad de relaciones de equivalencia $\mathcal{R}$ en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ tales que:

(i) $a \mathcal{R} h$

(ii) $\#[b] = 2 \times \#[a]$

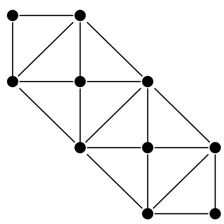
(donde $[x]$ denota la clase de equivalencia del elemento x). Hallar N.

Solución. La condición (a) implica que la clase de equivalencia de a tiene al menos 2 elementos. Usando la condición (b) resulta que la única posibilidad es que $\#[a] = 2$ y $\#[b] = 4$, pues si la clase de a tuviera 3 o más elementos, la clase de b tendría 6 o más elementos, y entre ambas serían más de 8 elementos (observe que la clase de a y la clase de b son distintas por (b), y por lo tanto disjuntas).

Ahora sabemos que la clase de a es $\{a, h\}$ y la clase de b es $\{b, \alpha, \beta, \gamma\}$ donde α, β, γ son tres elementos elegidos arbitrariamente en el conjunto $\{c, d, e, f, g\}$. La cantidad de formas de hacer esta elección es $\binom{5}{3} = 10$. Una vez que las clases de a y de b están determinadas, sobran dos elementos para los que hay dos opciones: que ambos estén en una única clase de equivalencia de dos elementos, o que ambos estén en clases de equivalencia de un solo elemento.

Por lo tanto, por la regla del producto, la solución es $N = 10 \cdot 2 = 20$.

Ejercicio 4. Se considera el grafo G de la figura.



Considerar la validez de las siguientes afirmaciones:

I. G tiene un recorrido euleriano

II. G tiene un circuito euleriano

III. G tiene un camino hamiltoniano

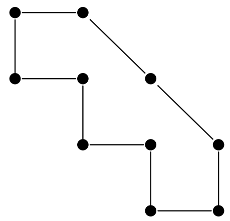
IV. G tiene un ciclo hamiltoniano

Solución.

I. G tiene 2 vértices de grado 2, 6 vértices de grado 4, y 2 vértices de grado 5. Como hay exactamente 2 vértices de grado impar, entonces G tiene recorrido euleriano

II. Como hay vértices de grado impar, entonces G no tiene circuito euleriano.

III y IV. G tiene ciclo hamiltoniano (y por lo tanto camino hamiltoniano), por ejemplo:



En suma: I, III y IV son verdaderas; II es falsa.

Ejercicio 5. Sea T un árbol con 120 aristas, 56 vértices de grado 1, a vértices de grado 2, b vértices de grado 3, y sin vértices de grado ≥ 4. Entonces:

(A) $a = 7$, $b = 57$
(B) $a = 8$, $b = 56$
(C) $a = 9$, $b = 56$
(D) $a = 10$, $b = 55$
(E) $a = 11$, $b = 54$

Solución. Por la fórmula de los grados sabemos que:

$$2 \cdot 120 = \sum_{v \in T} \mathrm{gr}(v) = 56 + 2\,a + 3\,b\ .$$

Por otra parte, como T es un árbol sabemos que la cantidad de vértices es uno más que la cantidad de aristas:

$$56 + a + b = 120 + 1\ .$$

En conjunto tenemos un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que se resuelve fácilmente, obteniendo $a = 11$, $b = 54$.

Ejercicio 6.

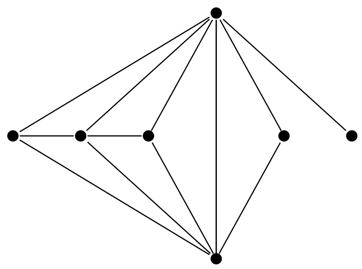
1. ¿Existe un grafo con 7 vértices de grados (1, 1, 3, 4, 4, 5, 6)?

2. ¿Existe un grafo con 7 vértices de grados (1, 2, 3, 3, 4, 5, 6)?

Solución.

1. No existe. El vértice de grado 6 debe ser adyacente a todos los otros vértices, y el vértice de grado 5 debe ser adyacente a todos los otros vértices excepto uno. Entonces hay a lo sumo un vértice de grado 1, lo que contradice lo requerido.

2. En este caso sí existe, por ejemplo:



Ejercicio 7. Sean $X = \{1, 2, 3\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, y sea A el conjunto de todos los pares $(x, y) \in X \times Y$ tales que $x \neq y$. En A definimos la relación:

$$(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x \leq x' \ \text{ e } \ y \leq y'$$

a. Demostrar que $\mathcal{R}$ es un orden parcial en A.
b. Determinar la cantidad de elementos de A y dibujar el diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$.
c. Indicar si $(A, \mathcal{R})$ es un retículo, justificando la respuesta.
d. Hallar los elementos maximales y minimales de A.
e. Indicar si A tiene máximo y mínimo, justificando la respuesta.
f. Dar un orden total $\mathcal{T}$ en A tal que $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$.

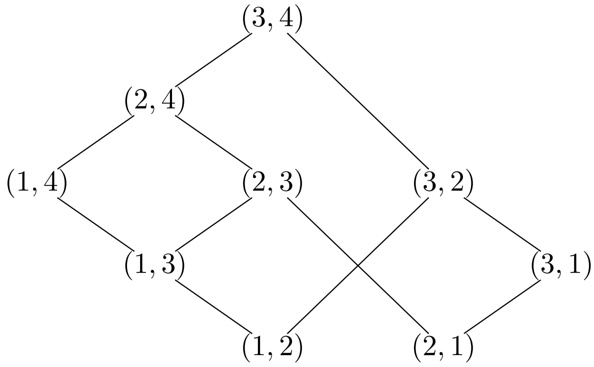
Solución.

a. *Reflexiva:* claramente $(x, y)\ \mathcal{R}\ (x, y)$.

Antisimétrica: si $(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y')$ y $(x', y')\ \mathcal{R}\ (x, y)$ entonces se sigue que $x \leq x'$, $y \leq y'$, $x' \leq x$, $y' \leq y$, de donde $x = x'$ e $y = y'$.

Transitiva: supongamos $(x, y)\ \mathcal{R}\ (x', y')\ \mathcal{R}\ (x'', y'')$. Entonces $x \leq x' \leq x''$ e $y \leq y' \leq y''$. Por lo tanto $x \leq x''$ e $y \leq y''$, luego $(x, y)\ \mathcal{R}\ (x'', y'')$.

b. El conjunto $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4)\}$ tiene 9 elementos. El diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$ es:



c. No es un retículo, por ejemplo el conjunto $\{(2,3),(3,2)\}$ no tiene ínfimo, ya que no tiene ninguna cota inferior.

d. El único elemento maximal es $(3,4)$. Hay dos elementos minimales: $(1,2)$ y $(2,1)$.

e. El máximo de A es $(3,4)$, pero no tiene elemento mínimo (si tuviera mínimo sería el único elemento minimal, pero ya indicamos que hay dos elementos minimales).

f. Podemos aplicar el algoritmo de ordenación topologica. La respuesta no es única; una solución está dada por

$$(2,1)\ \mathcal{T}\ (3,1)\ \mathcal{T}\ (1,2)\ \mathcal{T}\ (3,2)\ \mathcal{T}\ (1,3)\ \mathcal{T}\ (2,3)\ \mathcal{T}\ (1,4)\ \mathcal{T}\ (2,4)\ \mathcal{T}\ (3,4)$$