Matemática Discreta I

Segundo Parcial (curso 2004)

Miércoles 1 de diciembre de 2004

Nro. Parcial	Apellido y Nombre	Cédula de Identidad

La prueba es "sin material". Son 10 preguntas 8 múltiple opción y 2 de desarrollo. Todos los problemas valen 6 puntos y no se restan puntos.
Si desea que su resultado sea publicado en la web[1], responda V en la primer pregunta de la hoja de scanner. Toda la información extra sobre el parcial será publicada en la web.

EJERCICIO 1 Se corren los ocho programas de computadora del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Algunos de ellos requieren que otros programas hayan sido corridos previamente, según la tabla siguiente:

programa	previos
c	a
d	a, b
e	b
f	d, e
g	a, c, d
h	e, f, g

Se dispone de varias computadoras idénticas. Cada computadora corre solo un programa a la vez y todos los programas demoran el mismo tiempo (un segundo) al correr en cualquiera de ellas. ¿Cuál es la menor cantidad m de computadoras necesarias para minimizar el tiempo total n (en segundos) necesario para correr todos los programas?
Opciones:
A) n=m=3.
B) n=m =4.
C) m=3, n =4.
D) m=2, n=4.
E) m=5, n=2.

SOLUCIÓN: **Es la C)** Haciendo el diagrama de Hasse correspondiente vemos que, por el teorema de Dilworth, m es la longitud de la anticadena más grande, es decir 3 ($\{c, d, e\}$), ya que el conjunto se puede particionar en tres cadenas ($\{a, c, g, h\}$, $\{b, d, f\}$,{e}). Además el tiempo menor es la longitud mayor posible para una cadena que es 4, ya que $\{a, c, d, h\}$ es una cadena y $\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{g, f\}, \{h\}$ es una partición del conjunto en anticadenas .

[1] *http://www.fing.edu.uy/ webimerl/discreta1/principal.htm*

EJERCICIO 2 La cantidad de retículos definibles en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ es: A) 3; B) 12; C) 28; D) 32; E) 36.

SOLUCIÓN: **Es la E)** Hay dos diagramas de Hasse posibles, uno en "linea" y el otro en forma de rombo. Para el primero hay $4!$ posibilidades mientras que para el segundo $4!/2$. En total $4!3/2 = 4 \times 3 \times 3 = 36$.

EJERCICIO 3 ¿Cuántos grafos bipartitos conexos con 5 vértices sin aristas múltiples existen? (Grafos isomorfos se consideran el mismo). A) 3; B) 4; C) 5; D) 10; E) 15.

SOLUCIÓN: **Es la C)** Los vertices se pueden distribuir solo de dos formas: 1 y 4 vértices o 2 y 3 vértices. Para la primera, la única forma que el grafo sea conexo es que sea $K_{1,4}$, para la segunda, podemos distinguir dos casos. 1) uno de los primeros dos vértices está unido a los otros tres. En este caso el otro vértice puede estar unido a 1, 2 o 3 vértices. 2) uno de los vértices está unido solo a dos vértices. En ese caso , el otro vértice solo puede estar unido a dos vertices y no pueden ser los mismos a los cuales está unido el otro (aquí queda P_5)

EJERCICIO 4 Sea G un grafo plano con exactamente 5 componentes conexas. Sean $v = 100$ su cantidad de vértices, e su cantidad de aristas y r su cantidad de regiones planas. Calcule $v + r - e$. Opciones: A) 0; B) 2; C) 3; D) 4; E) 6.

SOLUCIÓN: **Es la E)** Aplicando la fórmula de Euler, a respuesta es la misma para cualquier grafo con 5 componentes, por ejemplo, 5 vértices aislados, que determinan una sola región y no aristas.

EJERCICIO 5 Sea T un árbol cuyos vértices solo pueden poseer grado 4, 5, 6 o 1. Si se sabe que hay exactamente 20 vértices de grado 4, 20 de grado 5 y 20 de grado 6. ¿Cuántas aristas tiene T? A) 150; B) 239; C) 240; D) 241; E) 245.

SOLUCIÓN: **Es la D)** Si llamamos h al número de hojas, y e al de aristas. Por la ecuación de los grados tenemos que $20 \times (4 + 5 + 6) + h = 2e$. Y como todo árbol tiene una arista menos que su número de vértices tenemos que $20 \times 3 + h = e + 1$. Restando las dos igualdades tenemos $20 \times 12 = e - 1$. De donde $e = 240 + 1 = 241$.

EJERCICIO 6 ¿Cuántos subgrafos inducidos no isomorfos posee P_5 (camino con cinco vértices)? A) 7; B) 8; C) 10; D) 11; E) 16.

SOLUCIÓN: **Es la C)** Hay 1 subgrafo inducido con 1 vértice, 2 con 2 vértices (uno sin aristas y otro con una arista), 3 con 3 vértices (uno sin aristas, otro con una y otro con dos), 3 con cuatro v'ertices (2 con 2 aristas y 1 con 3), y uno solo con cinco vértices. Total $1 + 2 + 3 + 3 + 1 = 10$.

EJERCICIO 7 Sea $P(G; \lambda)$ el polinomio cromático del grafo de la Figura 1.
Entonces $P(G; 4)$ vale: A) 0; B) 1344; C) 1728; D) 3456; E) 40320.

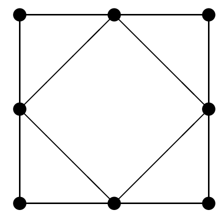

Figura 1: Ejercicio 7.

Solución: **Es la B)** Basta con obtener el polinomio cromático de C_4 ya que cada uno de los otros vértices se une a dos vértices adyacentes solamente, por lo que se podrán pintar de $\lambda - 2 = 2$ colores solamente, es decir $P(G;4) = P(C_4, 4) \times 2^4$. El cálculo de $P(C_4, \lambda)$ se vió en el teórico y evaluado en 4 da 84, por lo que el resultado es $84 \times 16 = 1344$.

EJERCICIO 8 Sea $G = (V, E)$ donde $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y
$E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, g\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{d, e\}, \{d, g\}, \{e, f\}, \{f, g\}\}$.
Se consideran las siguientes afirmaciones:
I) G es plano.
II) G es conexo.
III) El número cromático de G es 4.
IV) G tiene ciclo hamiltoniano.

La cantidad de afirmaciones anteriores verdaderas es: A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

Solución: **Es la C)** Una vez dibujado se ve que el grafo es una subdivisión elemental de $K_{3,3}$, po lo que no es plano, pero si es conexo y tiene un ciclo hamiltoniano. El número cromático no es 4 pues existe una coloración con 3 colores, ya que al poderse colorear $K_{3,3}$ con dos colores, el otro vértice se puede pintar con el tercer color.

Ejercicios de Desarrollo

EJERCICIO 9 Demostrar que si n es par positivo entonces para todo r par tal que $n \leq r \leq 2n$, existe una relación de equivalencia R sobre el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con $|R| = r$, donde $|R|$ es la cantidad de pares ordenados de R.

Solución: Si $r = n$ basta tomar la identidad. Si $r > n$ considere $s = n - r$ basta tomar la relación de equivalencia definida por la partición $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{s-1, s\}, \{s+1\}, \{s+2\}, \ldots \{n\}\}$, que tendrá las parejas (i, i) para todo i y las parejas $(2i-1, 2i), (2i, 2i-1)$ solo para $1 \leq i \leq s/2$. En total son $n + 2 * (s/2) = n + s = r$.

EJERCICIO 10 Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con todos sus vértices de grado par salvo exactamente cuatro. Demostrar que existen dos recorridos R_1 y R_2 de G tales que, si E_1 es el conjunto de aristas de R_1 y E_2 es el conjunto de aristas de R_2, entonces:

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing, \qquad E_1 \cup E_2 = E.$$

Solución: Basta agregar una arista e uniendo dos de los vértices de grado impar. El grafo pasará a tener exactamente dos vertices de grado impar por lo que el nuevo grafo tendrá un recorrido euleriano uniendo ambos vertices. Al quitar la arista e a dicho recorrido, obtenemos dos recorridos arista disjuntos que cubren entre ambos todas las aristas del grafo.