Matemática Discreta I

Segundo Parcial (curso 2003)

Martes 9 de diciembre de 2003

Respuestas a las Múltiple opción y Letra

RESPUESTAS							
1	2	3	4	5	6	7	8
D	B	C	E	A	A	E	C

MINI ENCUESTA

¿Desea que su resultado sea publicado en la web? (SI o NO):

A que teórico concurrió (M=matutino, V = vespertino, N = nocturno, 0 = ninguno)
a) durante la primera mitad del curso:
b) durante la segunda mitad del curso:

No hay puntos negativos y cada respuesta correcta vale 6 puntos. No se puede usar material.

Los resultados se dará el **lunes 15 de diciembre a las 15:00** y la muestra será el **martes 16 a las 17:30** (salón a confirmar).

EJERCICIO 1 Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Se considera la relación R en A tal que : aRb si $b^2 - a^2 \geq 0$ y es múltiplo de 5.
Indique la opción correcta:

(A) A tiene sólo 2 elementos maximales.

(B) A tiene sólo 2 elementos minimales .

(C) El grafo asociado a R tiene exactamente dos componentes conexas.

(D) Existe en A una cadena de 4 elementos.

(E) (A, R) es un retículo.

SOLUCIÓN: (A, R) consiste de tres cadenas $\{1,4,6\}$, $\{2,3,7,8\}$ y $\{5\}$. Por lo tanto tiene 3 elementos minimales, 3 maximales, no es retículo, el grafo asociado tiene tres componentes conexas y como la segunda cadena posee 4 elementos la repuesta correcta es la (D).

EJERCICIO 2 Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado. Considere las siguientes afirmaciones:
I) aRb si y solo si existe el supremo de $\{a,b\}$ y es b.
II) A es finito si y solo si posee algún elemento maximal.
III) Si (A, R) es un retículo, entonces m es maximal si y solo si m es máximo.
Indique la opción correcta:

(A) Solo (I) y (II) son correctas.

(B) Solo (I) y (III) son correctas.

(C) Solo (II) y (III) son correctas.

(D) Solo (III) es correcta.

(E) Ninguna opción es correcta.

SOLUCIÓN: I) es verdadero: $(\Rightarrow)$: aRb implica b cota superior de a. bRb implica b cota superior de b. Por lo tanto b cota superior de $\{a,b\}$. Si c es cota superior de $\{a,b\}$, entonces bRc por lo que b es menor que c. Por lo tanto b es la menor de las cotas superiores de $\{a,b\}$, es decir, el supremos. $(\Leftarrow)$ si b supremos de $\{a,b\} \Rightarrow b$ cota superior de $\{a,b\} \Rightarrow aRb$.

II) el directo es cierto pero no el recíproco ya que, por ejemplo, los naturales con la relación "mayor o igual" tiene un elemento maximal pero el conjunto es infinito.

III) es verdadero. ($\Rightarrow$): Si m es maximal, dado otro elemento x tendremos que $mR\sup(x,m) \Rightarrow m = \sup(x,m) \Rightarrow xRm$. ($\Leftarrow$): siempre un máximo es maximal. Por lo tanto es la (B).

EJERCICIO 3

Indicar para qué valores de $n \geq 3$ es C_n autocomplementario.
(A) Para ninguno ; (B) $n = 4$; (C) $n = 5$; (D) $n = 6$; (E) $\forall n \geq 4$.

SOLUCIÓN: El complementario de C_n tiene vértices con grado $n-3$, por lo tanto la única forma que sea un ciclo es si $n-3=2$, es decir para $n=5$. Además el complementario de C_5 es C_5, por lo tanto es la (C)

EJERCICIO 4

Se define el grafo tripartito completo $K_{r,s,t}$ como un grafo tal que sus vértices se puede escribir como unión disjunta de tres subconjuntos V_1, V_2, V_3 con $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, $|V_3| = t$ y tal que $\{a,b\}$ es una arista si y solo si $a \in V_i$, $b \in V_j$ con $i \neq j$. El grafo tripartito completo tiene un circuito euleriano si y solo si:

(A) r, s y t son todos pares.

(B) r, s y t son todos impares.

(C) r, s y t son todos pares o si hay dos pares y uno impar.

(D) r, s y t son todos pares o si hay uno par y dos impares.

(E) r, s y t son todos pares o todos impares.

SOLUCIÓN: Es la (E), ya que el grado de los vértices en V_i es $\sum_{j\neq i}|V_j|$, así que para que dichos grados sean pares, o bien son todos pares o bien la suma de dos cualesquiera de ellos es par, lo cual sucede solo si todos son impares.

EJERCICIO 5

El número cromático de un árbol de $n \geq 2$ vértices y grado máximo de los vértices Δ es:
(A) 2; (B) 3; (C) $\Delta+1$; (D) n; (E) C_2^n.

SOLUCIÓN: En la (A)Ej 17e Práctico 8.

EJERCICIO 6

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos con $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$. Se define

$$G_1 \bigcup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$

y

$$G_1 + G_2 = (G_1 \bigcup G_2) + E$$

donde $\{a,b\} \in E$ si y solo si $a \in V_1$ y $b \in V_2$.
Sean χ_1, χ_2, $\chi_\cup$ y χ_+, los números cromáticos de G_1, G_2, $G_1 \bigcup G_2$ y $G_1 + G_2$ respectivamente. **Indique la opción correcta:**

(A) $\chi_\cup = \max\{\chi_1, \chi_2\}$ y $\chi_+ = \chi_1 + \chi_2$.

(B) $\chi_\cup = \min\{\chi_1, \chi_2\}$ y $\chi_+ = \chi_1 \cdot \chi_2$.

(C) $\chi_\cup = \chi_1 + \chi_2$ y $\chi_+ = \chi_1 \cdot \chi_2$.

(D) $\chi_\cup = \chi_1 + \chi_2$ y $\chi_+ = \min\{\chi_1, \chi_2\}$.

(E) $\chi_\cup = \chi_1 \cdot \chi_2$ y $\chi_+ = \max\{\chi_1, \chi_2\}$.

SOLUCIÓN: Es la (A). Para $G_1 \bigcup G_2$ al no haber aristas de V_1 a V_2 se pueden pintar en forma independiente según las aristas de G_1 y G_2. Si $\chi_i \leq \chi_j$ alcanzan χ_j colores para pintar a ambos, esto es $\max\{\chi_1, \chi_2\}$. Para $G_1 + G_2$ todos los vértices de V_1 están unidos a los de V_2 por lo que deben tener colores diferentes. Se puede pintar primero V_1 con χ_1 colores y luego V_2 con otros χ_2 diferentes de los anteriores, en total $\chi_1 + \chi_2$.

EJERCICIO 7

Sea G un grafo sin lazos no plano con 5 vertices ¿Cuántas aristas tiene G? **Indique la opción correcta:**

(A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 9; (E) 10.
SOLUCIÓN: El único grafo no plano con 5 vértices es K_5 y tiene 10 aristas.

EJERCICIO 8

Calcular la cantidad de números de 6 cifras que verifican simultáneamente las siguientes condiciones:
i) Ningún de sus dígitos es 0 ó 9.
ii) La primera, segunda y quinta cifra son distintas a la tercera.
iii) La primera y la segunda son distintas de la sexta.
iv) La segunda y cuarta cifras suman 9.
(Por ejemplo el 123456 pero no el 102345, ni el

109234 ni el 923456.)
Indique la opción correcta:

(A) 11,368; (B) 7^5; (C) 16,856; (D) 79,576; (E) 117,992.

Sugerencia: Asociar un grafo al problema.

SOLUCIÓN: Como la cuarta cifra depende solo de la segunda, puede no tenerse en cuenta ya que una vez fijada la segunda la cuarta queda determinada. Formando un grafo con 5 vértices, uno por dígito excluyendo el cuarto, y uniendo dos dígitos si tienen que ser diferentes, la cantidad buscada será el polinomio cromático de dicho grafo evaluado en $10 - 2 = 8$. El grafo resultante es $G = (\{1, 2, 3, 5, 6\}, \{16, 13, 23, 26, 35\})$ (C_4 con un vértice colgante) y su polinomio cromático es $p(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$ (el de C_4 por $\lambda - 1$), por lo tanto la respuesta es $8.7^2.(64 - 24 + 3) = 16{,}856$

EJERCICIOS DE DESARROLLO

EJERCICIO 9

En $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ se considera la relación $R : (a, b)R(c, d)$ si $c - a$ es par y $d - b$ es múltiplo de 3.
a) Demostrar que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
b) Hallar la clase de equivalencia de $(0, 0)$ según R en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
c) Hallar el conjunto cociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/R$ ¿Cuántas clases de equivalencia tiene R?

SOLUCIÓN: a) Reflexiva: $(a, b)R(a, b) \Leftrightarrow a - a = 0, b - b = 0\checkmark$.
Simétrica: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow c - a = \dot{2}, d - b = \dot{3} \Leftrightarrow a - c = -\dot{2} = \dot{2}, b - d = -dot3 = \dot{3} \Leftrightarrow (c, d)R(a, b)\checkmark$.
Transitiva: $(a, b)R(c, d)R(e, f) \Leftrightarrow c - a = \dot{2}, d - b = \dot{3}, e - c = \dot{2}, f - d = 3$. Sumando la primera y segunda igualdades con la tercera y cuarta respectivamente obtenemos $e - a = \dot{2} + \dot{2} = \dot{2}$ y $f - b = \dot{3} + \dot{3} = \dot{3}$, $\Rightarrow (a, b)R(e, f)\checkmark$.

b) $[(0, 0)] = \{(x, y) : x = \dot{2}, y = \dot{3}\} = \{(0, 0), (0, 3), (0, -3), (2, 0), (-2, 0), ...\} = \{(2i, 3j) : i, j \in \mathbb{Z}\}$
c) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/R = \{[(0, 0)], [(0, 1)], [(0, 2)], [(1, 0)], [(1, 1)], [(1, 2)]\}$ Son seis clases.

EJERCICIO 10

Sea T un árbol con grado máximo (de vértices) Δ.
a) Demostrar que T tienen al menos Δ hojas.
b) ¿Cuántas hojas tendrá T tiene exactamente dos vértices con grado Δ? Justifique su respuesta.
c) ¿Cuántas hojas tendrá T si tiene k vértices de grado Δ y todos sus otros vértices tienen grado 1 o 2? Justifique su respuesta.

SOLUCIÓN: a) Por inducción en el número de vertices. Para un vértice $T = K_1$, $\Delta = 0$ y no tiene hojas. Si T tiene más de un vértice, por una propiedad vista en el teórico, tiene por lo menos dos hojas. Si una de ellas no es incidente a un vértice con grado Δ, quitarla dicho vértice continuará teniendo grado Δ y por la hipótesis inductiva el grafo tendrá por lo menos Δ hojas. Al volverla agregar el grafo resultante tendrá por lo menos Δ o $\Delta + 1$ hojas, en cualquiera de los casos tendrá al menos Δ hojas. Si ambas hojas son adyacente a un vértice de grado Δ al quitarla el grafo resultante tendrá grado máximo $\Delta - 1$ o Δ por lo que tendrá $\Delta - 1$ o Δ hojas, pero al agregarla nuevamente el grafo tendrá Δ o $\Delta + 1$ hojas

b) Fue anulada para el parcial.

c) Si $\Delta = 0$, entonces $T = K_1$ y no hay hojas. Si $\Delta = 1$, entonces $T = K_2$ y hay dos hojas. Si $\Delta \geq 2$, planteando la suma de los grados, si hay v vértices, e aristas, m vértices de grado 2 y h hojas tenemos que si $\Delta > 2$, entonces:

$$k\Delta + 2m + h = 2e = 2(n - 1)$$

y que $n = k + m + h$, por lo tanto $h = k(\Delta - 2) + 2$. Por otro lado, si $\Delta = 2$, entonces $2k + h = 2(k + h - 1)$ y $h = 2 = \Delta$ también.