Primer parcial – Miércoles 14 de octubre de 2020
Soluciones

Ejercicio 1.(V1.) Sean $I_1 = \{1, \dots, 5\}$ e $I_2 = \{6, \dots, 9\}$. Se define un embarajado de I_1 e I_2 como una función biyectiva: $f : I_1 \cup I_2 \to I_1 \cup I_2$ tal que $f(i) < f(j)$ si $i, j \in I_1$ con $i < j$, y $f(i) < f(j)$ si $i, j \in I_2$ con $i < j$. ¿Cuántos embarajados posibles hay de I_1 e I_2?.
R. $\binom{9}{5} = 126$ pues basta con determinar quien es $f(I_1)$, un subconjunto de tamaño 5 dentro de $I_1 \cup I_2$.

Ejercicio 1.(V2.) Sean $I_1 = \{1, \dots, 5\}$ e $I_2 = \{6, \dots, 10\}$. Se define un embarajado de I_1 e I_2 como una función biyectiva: $f : I_1 \cup I_2 \to I_1 \cup I_2$ tal que $f(i) < f(j)$ si $i, j \in I_1$ con $i < j$, y $f(i) < f(j)$ si $i, j \in I_2$ con $i < j$. ¿Cuántos embarajados posibles hay de I_1 e I_2?.
R. $\binom{10}{5} = 252$ pues basta con determinar quien es $f(I_1)$, un subconjunto de tamaño 5 dentro de $I_1 \cup I_2$.

Ejercicio 2.(V1.) Se repartirán 60 paquetes de vacunas en 3 ciudades distintas llamadas Ambar, Esmeralda y Rubi. En Ambar existen tres hospitales y todos recibirán la misma cantidad de paquetes. En Esmeralda también hay tres hospitales y entre ellos se repartirán equitativamente los paquetes. En Rubí existen 2 hospitales, pero el mayor de ellos recibirá el doble de paquetes que el otro. ¿De cuántas maneras podemos repartir los 60 paquetes entre las 3 ciudades de manera que todos los hospitales reciban al menos un paquete?
R. $\#(x_1 + x_2 + x_3 = 20 : x_1, x_2, x_3 \geq 1) = \#(x_1 + x_2 + x_3 = 17) = \binom{19}{2} = 171.$

Ejercicio 2.(V2.) Se repartirán 30 paquetes de vacunas en 3 ciudades distintas llamadas Ambar, Esmeralda y Rubi. En Ambar existen tres hospitales y todos recibirán la misma cantidad de paquetes. En Esmeralda también hay tres hospitales y entre ellos se repartirán equitativamente los paquetes. En Rubí existen 2 hospitales, pero el mayor de ellos recibirá el doble de paquetes que el otro. ¿De cuántas maneras podemos repartir los 30 paquetes entre las 3 ciudades de manera que todos los hospitales reciban al menos un paquete?
R. $\#(x_1 + x_2 + x_3 = 10 : x_1, x_2, x_3 \geq 1) = \#(x_1 + x_2 + x_3 = 7) = \binom{9}{2} = 36.$

Ejercicio 3.(5 pts.) ¿Cuántos numeros enteros hay entre 1 y $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ inclusive que no son divisibles por ninguno de los enteros 7,11,13?
R. 720. Considerando en el conjunto $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 1001\}$ las condiciones c_1, c_2 y c_3 ser múltiplo de 7, 11 y 13, respectivamente, entonces la respuesta es $\overline{N} = N - S_1 + S_2 - S_3 = 1001 - (143 + 91 + 77) + (13 + 11 + 7) - 1 = 1001 - 311 + 31 - 1 = 720.$

Ejercicio 3.(5 pts.) ¿Cuántos numeros enteros hay entre 1 y $819 = 7 \cdot 9 \cdot 13$ inclusive que no son divisibles por ninguno de los enteros 7,9,13?
R. 576. Considerando en el conjunto $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 819\}$ las condiciones c_1, c_2 y c_3 ser múltiplo de 7, 9 y 13, respectivamente, entonces la respuesta es $\overline{N} = N - S_1 + S_2 - S_3 = 819 - (117 + 91 + 63) + (13 + 9 + 7) - 1 = 819 - 271 + 29 - 1 = 576.$

Ejercicio 4.(5 pts.) Sean (a_n) y (b_n) las sucesiones asociadas a las funciones generatrices $A(x) = \frac{1+2x}{(1-x)^2}$ y $B(x) = \frac{1}{(1+2x)(1-x)}$. Sea (c_n) la convolución de ambas sucesiones. ¿Cuánto vale c_{10}?
R. 66, pues $c_k = k$-ésimo coeficiente de $A(x)B(x) = (1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$ y $\binom{12}{2} = 66$.

Ejercicio 4.(5 pts.) Sean $(a_n)_{n \geq 0}$ y $(b_n)_{n \geq 0}$ las sucesiones asociadas a las funciones generatrices $A(x) = \frac{1+2x}{(1-x)^2}$ y $B(x) = \frac{1}{(1+2x)(1-x)}$. Sea $(c_n)_{n \geq 0}$ la convolución de ambas sucesiones. ¿Cuánto vale c_{12}?
R. 91, pues $c_k = k$-ésimo coeficiente de $A(x)B(x) = (1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$ y $\binom{14}{2} = 91$.

Ejercicio 5.(5 pts.) Se consideran dos sucesiones (a_n) y (b_n) que verifican el sistema de recurrencias:

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n, \\ b_{n+1} = 3a_n + b_n, \end{cases}$$

para todo $n \geq 0$ y las condiciones iniciales $a_0 = \frac{1}{2^{10}}$ y $b_0 = \frac{1}{2^{11}}$. ¿Cuánto vale $a_{14} + b_{14}$?
R. 24. Pues si $c_n := a_n + b_n$ entonces $c_{n+1} = 2c_n$ y $c_{14} = 2^{14}c_0 = 24$.

Ejercicio 5.(5 pts.) Se consideran dos sucesiones (a_n) y (b_n) que verifican el sistema de recurrencias:

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n, \\ b_{n+1} = 3a_n + b_n, \end{cases}$$

para todo $n \geq 0$ y las condiciones iniciales $a_0 = \frac{1}{2^{10}}$ y $b_0 = \frac{1}{2^{11}}$. ¿Cuánto vale $a_{15} + b_{15}$?
R. 48. Pues si $c_n := a_n + b_n$ entonces $c_{n+1} = 2c_n$ y $c_{15} = 2^{15}c_0 = 48$.

Ejercicio 6 (ejercicio de desarrollo). Justifique todas las respuestas.

a) (5 pts.) Enuncie el principio de buen orden (P.B.O.).
b) (5 pts.) Pruebe el principio de inducción completa (P.I.C.) a partir del P.B.O.
c) (5 pts.) Use el P.I.C. para probar que $\frac{n^5-n}{5}$ es entero para todo entero $n \geq 0$.

a) Todo subconjunto no vacio de los naturales tiene elemento mínimo.

b) Sea $P(n)$ un proposición sobre $n \in \mathbb{N}$. Suponemos que $P(0)$ es verdadera (paso base) y que si $P(k)$ es verdadera para un cierto natural fijo k entonces $P(k+1)$ también es verdadera (paso inductivo). Queremos probar que $P(n)$ es verdadera para todo natural n, o en otras palabras, que el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es falsa}\}$ es vacio. Supongamos por absurdo que $S \neq \emptyset$. Entonces por el P.B.O. el conjunto S tiene un elemento mínimo $s = \min S$. Tenemos que $s \neq 0$ (pues como $P(0)$ es verdadera entonces $0 \notin S$), asi que $s - 1 \in \mathbb{N}$. Por otra parte $s - 1 \notin S$ pues $s - 1 < \min S$, asi que $P(s-1)$ es verdadera. Pero por el paso inductivo resulta que también $P(s-1+1) = P(s)$ sería verdadera, lo cual es una contradicción pues $s \in S$. Luego $S = \emptyset$ y $P(n)$ resulta verdadera para todo natural n.

c) Consideramos la proposición $P(n) = \frac{n^5-n}{5} \in \mathbb{Z}$. Para el paso base tomamos $n = 0$ y resulta que $\frac{n^5-n}{5} = 0 \in \mathbb{Z}$ asi que $P(0)$ es verdadera. Supongamos que $P(k)$ es verdadera, es decir que $\frac{k^5-k}{5} \in \mathbb{Z}$, y probaremos que $P(k+1)$ también es verdadera. En efecto,

$$\frac{(k+1)^5 - (k+1)}{5} = \frac{k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k - k}{5} = \frac{k^5 - k}{5} + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k.$$

que es entero pues el primer sumando es entero por hipótesis inductiva y todos los demás también lo son, por lo tanto $P(k+1)$ es verdadera. Por el P.I.C. resulta que $P(n)$ es entero para todo natural $n \geq 0$.