Matemática Discreta 1

Primer Parcial

Jueves 2 de mayo de 2019

El parcial dura tres horas, cada ejercicio múltiple opción vale cuatro puntos y no se restan puntos.
No está permitido usar calculadora ni "material".

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
C	B	C	C	A

Ejercicios de Múltiple Opción

Ejercicio MO1:

¿Cuántos subconjuntos del conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ contienen la a y/o la b?

A) 32
B) 95
C) 96
D) 128

Resolución: La cantidad de subconjuntos conteniendo la a es 2^6, igual a los que contienen a la b, mientras que los que contienen a ambas es 2^5, de forma tal que el total es

$$2 \times 2^6 - 2^5 = 2^5(4-1) = 32 \times 3 = 96.$$

Ejercicio MO2:

Sea $f(x)$ la función generatriz de la sucesión

$$a_n = 0, 0, 35, 0, 0, 35, 0, 0, 35, ...$$

O sea, para todo $k \geq 0$ tenemos $a_{3k} = a_{3k+1} = 0$ y $a_{3k+2} = 35$. Hallar $f(1/2)$:

A) $f(1/2) = 2/7$
B) $f(1/2) = 10$
C) $f(1/2) = 20$
D) $f(1/2) = 30$

Resolución:

$$f(x) = 35x^2+35x^5+35x^8+\cdots = 35x^2(1+x^3+x^6+\cdots) = 35x^2(1+x^3+(x^3)^2+\cdots) = \frac{35x^2}{1-x^3}$$

de donde $f(1/2) = 35\dfrac{1/4}{1-1/8} = 35\dfrac{2}{7} = 10$

Ejercicio MO3: ¿Cuántas maneras hay de formar una mano de tres cartas del mismo palo en un mazo con 40 cartas 10 de cada palo (sin importar el orden de las tres cartas)?

A) 120
B) 124
C) 480
D) 2880

Resolución: Se eligen en dos etapas: etapa 1 elijo el palo, de 4 formas distintas y en una etapa 2 elijo tres cartas de dicho palo de $\binom{10}{3}$ formas distintas, total $4 \times \binom{10}{3} = 4 \times 10 \times 9 \times 8/3! = 4 \times 10 \times 3 \times 4 = 480$

Ejercicio MO4: Cuatro maestras salen de paseo con seis niños y deciden formar tres grupos. ¿Cuántas formas hay de formar los grupos si cada uno debe contar con alguna maestra y algún alumno?

A) $S(4,3)S(6,3)$
B) $Sob(4,3)Sob(6,3)$
C) $S(4,3)Sob(6,3)$
D) **Ninguna de las anteriores**

Resolución: Elijo los grupos en dos etapas: en la primer etapa creo tres grupos con las cuatro maestras de $S(4,3) = 6$ maneras posibles y en la segunda etapa asigno los seis estudiantes a los grupos creados de $Sob(6,3) = 540$ formas posibles. Total $6 \times 540 = 3240$. Recordemos que $S(m,n) = Sob(m,n)/n!$ y

$$Sob(m,n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m,$$

de donde

$$S(4,3) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^4 = \frac{1}{6} \left(\binom{3}{0} 3^4 - \binom{3}{1} 2^4 + \binom{3}{2} 1^4 \right) = \frac{3^4 - 32^4 + 3}{6} = \frac{3^3 - 2^4 + 1}{2}$$

$$= \frac{27 - 16 + 1}{2} = \frac{28 - 16}{2} = 14 - 8 = 6$$

y

$$Sob(6,3) = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^6 = \left(\binom{3}{0} 3^6 - \binom{3}{1} 2^6 + \binom{3}{2} 1^6 \right)$$
$$= (3^6 - 3.2^6 + 3) = 3(3^5 - 2^6 + 1) = 3(243 - 64 + 1) = 540$$

Ejercicio MO5:

Sea b_n la sucesión generada por la función

$$b(x) = \frac{x+1}{1 - 3x + 2x^2}.$$

Hallar b_6 el coeficiente de x^6:

A) 190
B) 191
C) 192
D) 193

Resolución:

$$\frac{x+1}{1-3x+2x^2} = \frac{x+1}{(1-2x)(1-x)} = (x{+}1)\left(\frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}\right) = (x{+}1)\left(\frac{2}{1-2x} + \frac{-1}{1-x}\right)$$

$$= (x+1)\left(2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = (x+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

De donde el coeficiente en x^6 es $2^6 + 2^7 - 1 - 1 = 64 + 128 - 2 = 190$

Ejercicios de Desarrollo

Ejercicio de Desarrollo 1: (6 ptos)

Hallar cuales números naturales pueden expresarse en la forma

$$3i + 6j + 7k, \qquad\qquad \text{con } i, j, k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Justificar su respuesta demostrando lo que se afirma.

Resolución: Está claro que no se pueden expresar 1, 2, 4, 5, 8, 11, pero sí: 3, 6, 9=3.2, 10=3+7, 12=6.2, 13 = 3.2+7, 14= 7.2.

Por lo tanto, por el principio de inducción fuerte demostraremos que se puede para dichos naturales y para los siguientes mayores o iguales a 14: supongamos que se puede desde $n_0 = 12, \ldots, n$ con $n \geq n_1 = 14$, entonces demostraremos que se puede para $n{+}1$. Efectivamente como $n \geq 14$, entonces $n{+}1 \geq 15$ y $(n{+}1){-}3 \geq 15{-}3 = 12$ y $(n+1) - 3 = n - 2 \leq n$, o sea que $12 \leq (n+1) - 3 \leq n$, por lo tanto podemos aplicar la hipótesis inductiva fuerte y concluir que existen $i, j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que

$$(n+1) - 3 = 3i + 6j + 7k,$$

de donde

$$n + 1 = 3(i+1) + 6j + 7k,$$

con $i+1, j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejercicio de Desarrollo 2: (6 ptos) Demostrar que dados doce números del 1 al 20, hay dos que sumados dan 20.

Resolución: Tomemos los subconjuntos $\{1,19\}, \{2,18\}, \ldots \{9,11\}, \{10\}, \{20\}$ como palomares. Dados doce números dos distintos caerán en uno de los once palomares. Al ser dos distintos, deben caer en uno de los primeros nuevo, por lo que su suma será 20.

Ejercicio de Desarrollo 3: (8 ptos) Resolver la ecuación

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - 1 + 2^n \qquad \text{con } a_0 = 1/2, a_1 = 3/4.$$

Resolución: La ecuación característica es $x^2 - x + 2 = 0$ que tiene raíces -1 y 2, por lo tanto la ecuación homogénea tiene solución

$$a_n^{(H)} = \alpha(-1)^n + \beta 2^n.$$

Para obtener soluciones particulares utilizamos el principio de superposición y obtenemos particulares para las ecuaciones:

$$a_n^{(P_1)} = a_{n-1}^{(P_1)} + 2a_{n-2}^{(P_1)} - 1$$

y

$$a_n^{(P_2)} = a_{n-1}^{(P_2)} + 2a_{n-2}^{(P_2)} + 2^n.$$

Para la primera probamos soluciones de la forma una constante A:

$$A = A + 2A - 1 \Rightarrow A = 1/2$$

Para la segunda probamos soluciones de la forma $An2^n$:

$$An2^n = A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} + 2^n$$

o sea

$$An2^n = A(n-1)2^{n-1} + A(n-2)2^{n-1} + 2^n$$

o sea

$$An2 = A(n-1)+A(n-2)+2 \Rightarrow 2An = An-A+An-2A+2 \Rightarrow 0 = -3A+2 \Rightarrow A = 2/3$$

De forma tal que la solución particular de la ecuación original es

$$a_n^{(P)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}n2^n.$$

O sea que la solución general de la ecuación original es

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{n2^{n+1}}{3} + \alpha(-1)^n + \beta 2^n.$$

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{0 2^{0+1}}{3} + \alpha(-1)^0 + \beta 2^0 = \frac{1}{2} + \alpha + \beta. \\ \frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2^{1+1}}{3} + \alpha(-1)^1 + \beta 2^1. \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \alpha + \beta. \\ -\frac{1}{2} = -\alpha + 2\beta. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = \alpha + \beta. \\ -\frac{1}{2} = 3\beta \Rightarrow \beta = -\frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{6} \end{cases}$$

de donde

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{n2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{6} - \frac{2^n}{6}$$