SOLUCIÓN – Examen
Matemática Discreta I

Viernes 28 de Julio de 2023

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
B	A	C	B	E

Múltiple Opción 1

Sea G un grafo simple, plano y conexo con 8 vértices, todos ellos de grado 3. Sea r la cantidad de regiones de una inmersión plana de G. Entonces:
(A) $r = 5$; (B) $r = 6$; (C) $r = 7$; (D) $r = 8$; (E) Tal grafo no existe.

Solución - Múltiple Opción 1

Por el lema de handshaking $2|E| = 3|V| = 24$, por lo que $|E| = 12$. Como el grafo es simple, plano y conexo, vale la fórmula de Euler: $|V| - |E| + r = 2$, por lo que $r = 6$. Un grafo conexo 3-regular con 6 caras, 8 vértices y 12 aristas es el cubo. Por lo tanto, la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 2

Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia. (A) 90; (B) 120; (C) 150; (D) 180; (E) 210.

Solución - Múltiple Opción 2

Se pide determinar la cantidad de particiones de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en 3 conjuntos, que vale $S(6, 3) = Sob(6, 3)/3!$. A partir del principio de inclusión y exclusión se deduce que $Sob(6, 3) = 3^6 - \binom{3}{1}2^6 + \binom{3}{2}1^6 = 540$, por lo que $S(6, 3) = 540/6 = 90$, y la respuesta correcta es la A.

Múltiple Opción 3

Encontrar el menor entero positivo n que permita asegurar que, de cualquier forma que se elijan n enteros distintos entre 1 y 100 inclusive, habrá dos de ellos cuya suma sea igual a 50. (A) 75; (B) 76; (C) 77; (D) 78; (E) 79.

Solución - Múltiple Opción 3

Notemos que $\mathcal{N} = \{\{1, 49\}, \{2, 48\}, \ldots, \{24, 26\}, \{25\}, \{50\}, \{51\}, \ldots, \{100\}\}$ tiene precisamente 76 elementos. Sea X un subconjunto cualquiera de $\{1, \ldots, 100\}$ con 77 elementos. Definamos los nidos como los elementos de la partición $\mathcal{N}$, y las palomas como los elementos de X. Cada elemento de X pertenece a algún subconjunto de $\mathcal{N}$, porque $\mathcal{N}$ es una partición de $\{1, \ldots, 100\}$. En particular, cada paloma pertenece a algún nido. Como $|X| = 77$ y $|\mathcal{N}| = 76$, por el Principio del Palomar existe algún nido que posee al menos dos palomas. En términos de X y de $\mathcal{N}$, esto es que existen dos elementos de X que son de la forma $\{i, 50 - i\}$ para algún $i \in \{1, \ldots, 24\}$, o equivalentemente, que existen dos elementos diferentes pertenecientes a X cuya suma es igual a 50. Esto prueba que todo subconjunto X de $\{1, \ldots, 100\}$ con 77 elementos cumple la propiedad estudiada. Construyamos ahora un subconjunto de $\{1, \ldots, 100\}$ con 76 elementos que no cumple la propiedad deseada. De hecho, si elegimos $Y = \{1, 2, \ldots, 25, 50, 51, \ldots, 100\}$ entonces Y tiene 76 elementos, y además no existen dos elementos pertenecientes a Y cuya suma sea igual a 50. Luego el menor entero positivo n que cumple la propiedad estudiada es $n = 77$, y la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 4

Sea a_n la cantidad de secuencias de largo n formadas con los números 0, 1, 2, 3 y 4 tales que dos entradas consecutivas difieren en magnitud exactamente en 1 y además la última entrada de la secuencia es 1 o 3. Hallar a_{21}.

Sugerencia: plantear una recurrencia homogénea de segundo orden para a_n.

(A) 3×2^{10}; (B) 2×3^{10}; (C) 3^{11}; (D) 5×2^{10}; (E) 4×3^{10}.

Solución - Múltiple Opción 4

Por simetría, la cantidad de secuencias a_n que terminan en 1 es la misma que la de las secuencias que terminan en 3. De hecho, toda secuencia $x_1x_2\cdots x_n$ que termina en 1 se corresponde de manera biyectiva con la secuencia $y_1y_2\cdots y_n$, donde $y_i = 4 - x_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, y dicha secuencia termina en 3.

Ahora, observemos que toda secuencia de largo n que termina en 1 tiene exactamente 3 maneras de ser extendida a una secuencia de largo $n+2$ que termina en 1 o en 3, que tienen precisamente los sufijos 121, 101, o bien 123. Por lo visto en el párrafo anterior, también hay exactamente 3 maneras de extender a toda secuencia de largo n que termina en 3 para obtener una secuencia de largo $n+2$ que termina en 1 o en 3. Pero entonces se cumple que $a_{n+2} = 3a_n$, y además $a_1 = 2$ (puesto que podemos empezar con 1 o bien con 3 Luego $a_{21} = a_1 \times 3^{10} = 2 \times 3^{10}$, y la opción correcta es la B.

Múltiple Opción 5

Sean $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, 51\}$. Determinar la cantidad de funciones sobreyectivas f de A en B tales que $f(1) \leq f(2) \leq \ldots \leq f(100)$.

Sugerencia: considerar la cantidad de preimágenes de cada elemento de B.

A) 150!/(51!99!); (B) 150!/48!; (C) 150!/99!; (D) 99!/(48!51!); (E) 99!/49!50!.

Solución - Múltiple Opción 5

Como f es sobreyectiva, cada $i \in B$ tiene al menos un elemento de A que lo alcanza. Sea x_i la cantidad de preimágenes que tiene el elemento i. Como f es sobreyectiva, entonces $x_i \geq 1$ para cada $i \in B$. Como f es función, cada elemento de A alcanza exactamente un elemento de B, y hay en total 100 elementos en el conjunto A. Entonces $x_1+x_2+\cdots+x_{51} = 100$. Por último, notemos que como f es creciente entonces f se determina de manera única con la cantidad de veces que se alcanza cada elemento. Hemos reducido el problema a contar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_{51} = 100$ sujeto a que $x_i \geq 1$ para cada $i \in B$. Tomando cambios de variable $x_i' = x_i - 1$ para cada $i \in B$ y reemplazando cada x_i por $x_i'+1$ en la igualdad anterior, reducimos el problema a contar soluciones naturales de $(x_1'+1)+(x_2'+1)+\cdots+(x_{51}'+1) = 100$, donde cada variable x_i' tiene dominio en los naturales. Entonces, basta con determinar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1' + x_2' + \cdots + x_{51}' = 100 - 51 = 49$, que es igual a CR_{49}^{51}, y es lo mismo que 99!/49!50!. Luego, la opción correcta es la E.

Ejercicio de Desarrollo 1

Sea $(A, \leq)$ una relación de orden parcial, donde A es un conjunto finito y no vacío. Queremos probar que A tiene algún elemento que es maximal. Primero consideremos la relación $(A, <)$, donde $a < b$ si y sólo si $a \leq b$ y $a \neq b$. Notemos que $<$ es transitiva.

Supongamos por absurdo que A no tiene ningún elemento maximal. Primero, como A es no vacío, tomemos un elemento cualquiera a_0 de A. Como a_0 no es maximal, entonces existe $a_1 \in A$ tal que $a_0 < a_1$. Como a_1 tampoco es maximal, entonces existe $a_2 \in A$ tal que $a_1 < a_2$. Repitiendo este razonamiento obtenemos un conjunto $S = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, incluido en A. Además todos los elementos de S son distintos: dados $m < n \in \mathbb{N}$, la propiedad transitiva nos da que $a_m < a_{m+1} < \cdots a_n$, de donde $a_m < a_n$. Esto implica que S es infinito, lo cual es una contradicción porque A es finito. La contradicción proviene de haber supuesto inicialmente que el conjunto A no tiene ningún elemento maximal. Entonces, existe algún elemento de A que es maximal, como queríamos demostrar.

Ejercicio de Desarrollo 2

(1) Asumiremos como cierto el siguiente resultado.

Lema 1. *Todo árbol con al menos dos vértices tiene algún vértice de grado 1.*

Probaremos, mediante el principio de inducción completa sobre el número de vértices, que todo árbol finito $T = (V, E)$ cumple que $|E| = |V| - 1$. Para cada entero positivo n consideremos la siguiente proposición:

$P(n)$: *todo árbol con exactamente n vértices tiene exactamente $n - 1$ aristas.*

Queremos probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple $P(n)$. El paso base consiste en probar $P(1)$. El único árbol con exactamente 1 vértice no tiene aristas. Como $0 = 1 - 1$, entonces el paso base es cierto.

A continuación vamos a probar el paso inductivo. Sea h un entero positivo fijo cualquiera. La hipótesis inductiva consiste en asumir que $P(h)$ es cierta, es decir que todo árbol con exactamente h vértices tiene exactamente $h - 1$ aristas. Debemos probar que $P(h + 1)$ es cierta.

Consideremos un árbol cualquiera $T = (V, E)$ que tiene exactamente $h + 1$ vértices, es decir que $|V| = h + 1$. Como h es entero positivo entonces $h + 1$ también, y además $h + 1 \geq 2$. Entonces, T satisface las hipótesis del Lema 1, y por lo tanto existe algún vértice v de V que tiene grado 1. Sea $T' = (V', E')$ el grafo que se obtiene de eliminar el vértice v de T, es decir que $T' = T - v$. Notar que T' no tiene ciclos, puesto que T no los tenía y eliminar vértices no genera ciclos. Además, el grafo T' también es conexo. De hecho, dados dos vértices distintos x e y de T', el mismo camino simple que existe en T con extremos x e y no contiene al vértice v, puesto que v tiene grado 1. Entonces, V' es un árbol. Además, por construcción, tenemos que T' tiene exactamente un vértice menos que T y exactamente una arista menos que T, por lo que $|E'| = |E| - 1$ y $|V'| = |V| - 1$. Como T' es un árbol que tiene exactamente h vértices, por hipótesis inductiva se sigue que T' tiene exactamente $h - 1$ aristas. Pero entonces $|E| = |E'| + 1 = (h - 1) + 1 = h$. Hemos probado que cualquier árbol con exactamente $h + 1$ vértices tiene exactamente h aristas, es decir que hemos probado que la proposición $P(h + 1)$ es cierta.

Como $\mathbb{Z}^+$ es un conjunto que satisface el principio del buen orden y tanto el paso base como el paso inductivo son ciertos, por el principio de inducción completa concluimos que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple $P(n)$, como queríamos demostrar.

(2) Sea ahora $G = (V', E')$ un grafo simple conexo. Si G es acíclico entonces es un árbol, y por la parte anterior se cumple que $|E'| = |V'| - 1$. Si no, existe algún ciclo C_n en G. Sea e una arista del ciclo. Notemos que $G - e$ es conexo. En efecto, cada vez que se utiliza la arista e dentro de un camino simple en G es posible reemplazar su aparición por el camino dado por $C - e$. Si el grafo resultante $G - e$ fuese acíclico, entonces el grafo $G - e$ sería un árbol. Este mismo procedimiento se repite una cantidad finita de veces, hasta obtener un grafo conexo y sin ciclos, es decir, un árbol. Como debimos eliminar aristas del grafo G para obtener un árbol, entonces se cumple que $|E'| \geq |V'| - 1$, como queríamos demostrar.