Número de Examen	Cédula	Apellidos.

Matemática Discreta 1

Examen

Sábado 13 de julio de 2019

El examen dura tres horas, cada ejercicio múltiple opción vale diez puntos y no se restan puntos. No está permitido usar calculadora ni “material”.

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5

Ejercicios de Múltiple Opción

Ejercicio MO1: Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$a_{n+2} - a_n = 2^n, \text{ para } n \geq 0, a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Entonces: A) $a_{1002} = \frac{4^{501}-1}{3}$ y $a_{1003} = \frac{2 \cdot 4^{501}+1}{3}$.
B) $a_{1002} = \frac{2^{1001}-1}{3}$ y $a_{1003} = \frac{2 \cdot 2^{1001}+1}{3}$.
C) $a_{1002} = \frac{4^{500}-1}{3}$ y $a_{1003} = \frac{2 \cdot 4^{500}}{3}$
D) $a_{1002} = 4^{501}$ y $a_{1003} = 4^{502}$.

Ejercicio MO2: ¿Cuántas palabras se pueden formar usando dos letras de la palabra *meme* y tres letras de la palabra *penca*?

A) 1800
B) 1810
C) 1820
D) 1830

Ejercicio MO3:

Considere la sucesión a_n que verifica $a_0 = 1$ y para todo $n \geq 0$:

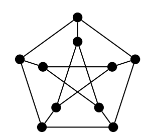
$$a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots a_n a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}.$$

Si $f(x)$ es la función generatriz de a_n, entonces $f(1/4)$ vale:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

Ejercicio MO4:

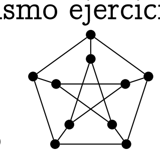
El grafo de *Petersen* es el grafo 3-regular



y contiene:

A) un recorrido euleriano
B) un circuito euleriano si se agregan 4 aristas
C) un ciclo hamiltoniano
D) un camino hamiloniano

(Otra versión del mismo ejercicio):

Considere el grafo  ¿Cuántas aristas hay que agregarle como mínimo para que el grafo resultante tenga un recorrido euleriano?

A) 1
B) 2

C) 3

D) 4

Ejercicio MO5: Diremos que un árbol es **casi regular** si todos los vértices que no son hojas tienen el mismo grado. ¿Cuántos árboles no isomorfos casi regulares de 5 vértices hay?

A) Ninguno

B) 1

C) 2

D) 3

Ejercicios de Desarrollo (Cada parte de los ejericios vale 5 ptos)

Ejercicio de Desarrollo 1: Sea T un árbol no trivial (con al menos una arista).

a) Probar que si a T le quito una arista, el grafo obtenido no es conexo.

b) Probar que si a T le agrego una arista, el grafo obtenido tiene un ciclo.

Ejercicio de Desarrollo 2: Sea $V = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y $G = (V, \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\})$ el grafo completo sobre V y A_4 el conjunto de 4-ciclos de G o sea, el conjunto se subgrafos de G isomorfos a C_4.

a) ¿Cuál es el cardinal de A_4?

b) Dada una arista e de G, ¿cuántos grafos de A_4 la contienen?

c) Sea H un grafo con 10 vértices, y 34 aristas. Demuestre que H tiene (al menos) un *4-ciclo*.

Ejercicio de Desarrollo 3: Considere un triángulo equilatero T de lado 1. Hallar la cantidad máxima N de puntos que se pueden colocar a distancia mayor o igual a 1/2.

a) Hallar N puntos a distancia mayor o igual a 1/2.

b) Demostrar que si se colocan $N + 1$ puntos dos de ellos estarán a distancia menor estricta que 1/2.

Ejercicio de Desarrollo 4: Considere grafos simples, o sea, sin aristas múltiples ni lazos:

a) Enunciar la fórmula de Euler para grafos planos conexos.

b) Demostrar que en todo grafo plano $G = (V, E)$ se cumple que $v - e + r = 1 + \kappa(G)$ donde $v = |V|$, $e = |E|$, r es la cantidad de regiones que determina una inmersión plana cualquiera del grafo G y $\kappa(G)$ la cantidad de componentes conexas de G.

c) Dibujar todos los grafos planos no isomorfos que cumplen $v = 6$, $e = 3$ y $r = 1$.