Matemática Discreta I

Examen

Jueves 15 de Febrero de 2017

Número de examen	Nombre y Apellido	Cédula de Identidad

RESPUESTAS					No completar		
1	2	3	4	5	6	7	8

El examen se aprueba con 60 puntos o más.

EJERCICIOS MÚLTIPLE OPCIÓN (total 50 puntos).

Correctas: 10 puntos, Incorrectas: -2 puntos, Sin responder: 0 puntos.

EJERCICIO 1 ¿Cuántas palabras de 5 letras puedo formar a partir de la palabra TARGARYEN de modo que tengan 3 vocales y además no están juntas? Opciones: A) 61; B) 62; C) 63; D) 64; E) 65.

Solución

En primer instancia ubicamos las 3 vocales; es fácil ver que hay solo 3 formas de hacerlo de acuerdo a las restricciones. Luego ubicamos las consonantes (6), y para esto hay que tener cuidado con el hecho de que tenemos 2 ”R”. Entonces separamos en 3 casos: que las palabras tengan solo 1 R, que tengan las 2 o que no tengan ninguna.

Para el primer caso tenemos $4 \times 2 = 8$ palabras; para el segundo tenemos solo 1 palabra; y por último para el tercer caso tenemos $4 \times 3 = 12$ palabras. Por lo tanto, en total podemos formar $3 \times (8 + 1 + 12) = 3 \times 21 = 63$ palabras según las restricciones dadas.

EJERCICIO 2 ¿Cuántos números pares y menores que 1000 son múltiplos de 11 pero no son divisibles entre 7, 3 o 5? Opciones: A) 21; B) 42; C) 26; D) 52; E) 24.

Solución

Hay 45 números pares y menores que 1000 que son múltiplos de 11. De los cuales:

- 6 son múltiplos de 7
- 15 son múltiplos de 3

- 9 son múltiplos de 5
- 2 son múltiplos de 7 y 3
- 1 es múltiplo de 7 y 5
- 3 son múltiplos de 3 y 5
- 0 es múltiplo de 7,3 y 5

Por principio de inclusión-exclusión tenemos

$$45 - (6 + 15 + 9) + (2 + 3 + 1) - 0 = 45 - 30 + 6 = 21$$

EJERCICIO 3 El club de bochas *La ochava* va a elegir un nuevo presidente entre cuatro candidatos: Álvarez, Baldi, Castro y Díaz. En la elección participan los 26 socios del club. Cada candidato es socio y, naturalmente, vota por sí mismo. La esposa y los dos hijos de Álvarez son socios, y votarán por él. Díaz cuenta entre los socios a su madre y su hermana, que votarán por ella. Castro tiene un hijo adolescente que también es socio y no piensa votar por él de ningún modo. Esta elección despierta intensas pasiones, por la que ningún socio vota en blanco. ¿En cuántos de los resultados posibles de esta elección[1] Álvarez y Baldi empatan? Opciones: A) En 238; B) En 123; C) En 96; D) En 63; E) En ninguno.

Solución
Sean a, b, c y d los números de votos que obtienen Álvarez, Baldi, Castro y Díaz, respectivamente. Sabemos que:

1. $a + b + c + d = 26$.
2. $a \geq 4$, $b \geq 1$, $c \geq 1$ y $d \geq 3$.
3. El hijo de Castro no vota a su padre.

Buscamos soluciones de la primera ecuación en las que $a = b$, es decir, buscamos soluciones de

$$2a + c + d = 26$$

con las restricciones arriba mencionadas. Haciendo el cambio de variables $a' = a - 4$, $c' = c - 1$, $d' = d - 3$, obtenemos

$$2a' + c' + d' = 14$$

.

[1]Un resultado de la elección es una especificación de cuántos votos obtiene cada candidato.

Calculemos el número de soluciones enteras de esta ecuación usando el método de funciones generatrices. Buscamos el coeficiente de x^{14} de

$$f(x) = (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2.$$

Llamemos $g(x)$ al primer factor y $h(x)$ al segundo. Sabemos que

$$h(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(i+1)x^i.$$

Haciendo la convolución de g y h, vemos que el coeficiente de x^{14} en f es

$$15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 64.$$

Recordemos que $c' < 14$, pues el hijo de Castro no vota a su padre, por lo que tenemos que restar una solución. Esto nos da 63 resultados de la votación en los que Álvarez y Baldi empatan.

EJERCICIO 4 Un clique de G=(V,E) es un subgrafo completo. ¿Cuántos cliques con más de 2 vértices hay en K_{10}? Opciones: A) 968; B) 1024; C) 673; D) 854; E) 720.

Solución

La cantidad de cliques con k vértices ($3 \leq k \leq 10$) es $\binom{10}{k}$. Luego, la cantidad de cliques con más de 2 vértices que hay en K_{10} es $\displaystyle\sum_{k=3}^{10}\binom{10}{k} = 968$.

EJERCICIO 5 ¿De cuántas maneras se pueden sentar 7 personas en un círculo, si dos arreglos son considerados el mismo siempre que cada persona tenga los mismos vecinos (no necesariamente del mismo lado)? Opciones: A) 120; B) 360; C) 720; D) 840; E) 49.

Solución

Como las 7 rotaciones y las 2 reflexiones generan el mismo arreglo, la respuesta es $\dfrac{7!}{7 \times 2} = 360$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 50 puntos)
Justifique su respuesta en cada uno de los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 6 *(15 puntos)* Probar que para todo $n \geq 1$ se cumple que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3.$$

(Sugerencia: Recordar que $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$.)

Solución:

1. Paso base: n=1

$$\left(\sum_{i=1}^{1} i\right)^2 = 1^2 = 1^3 = \sum_{i=1}^{1} i^3$$

2. Paso inductivo:
H_{ind}: La igualdad se cumple para $n = k$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} i^3$$

T_{ind}: La igualdad se cumple para $n = k+1$

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^3$$

Demostración:

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} i + (k+1)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 + (k+1)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)(k+1)$$

Aplicando la hipótesis de inducción y usando la sugerencia:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right)^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)(k+1) && \text{aplicando } H_{ind} \\
&= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^2 + k(k+1)^2 && \text{usando la sugerencia} \\
&= \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} i^3
\end{aligned}$$

EJERCICIO 7 *(15 puntos)* Sean f(x) y g(x) funciones que generan las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ respectivamente:

1. ¿Qué significa que una función genera una sucesión?
2. Dar una fórmula para la sucesión generada por $f(x).g(x)$. ¿Cómo se llama esta sucesión?
3. Dar una fórmula para la sucesión generada por $\frac{1}{1-x}.f(x)$.
4. Determinar la función que genera la sucesión $\{n+1\}_{n=0}^{\infty}$
5. Determinar la función que genera la sucesión 0, 0+1, 0+1+2,. . ., $\sum_{i=0}^{k} i$, . . .
6. Utilizar el ítem anterior para probar la siguiente igualdad: $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (Puede ser de ayuda el binomio de Newton extendido)

Solución

1. Ver teórico

2. La sucesión generada por $f(x).g(x)$ es $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} * \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ denominada convolución y cuyo n-ésimo término es $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.b_{n-i}$

3. Sabemos que $\dfrac{1}{1-x}$ genera $\{1\}_{n=0}^{\infty}$

La sucesión es $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} * \{1\}_{n=0}^{\infty}$, donde el término general es $c_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

4. Como $\dfrac{1}{1-x} \times \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ entonces dicha función genera a

$$\{n+1\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty} * \{1\}_{n=0}^{\infty}$$

5. La sucesión considerada en esta parte es

$$\{n+1\}_{n=0}^{\infty} * \{1\}_{n=0}^{\infty}$$

Por las partes anteriores esta sucesión es generada por $\dfrac{x}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{(1-x)} = \dfrac{x}{(1-x)^3}$

6. Es claro que $\sum_{i=1}^{n} i$ equivale al coeficiente de x^n en $\dfrac{x}{(1-x)^3}$.

Por binomio de Newton, sabemos que el coeficiente de x^n en $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ es $CR_3^n = C_2^{n+2}$

Luego, el coeficiente de x^n en $\dfrac{x}{(1-x)^3}$ es $CR_3^{n-1} = C_2^{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

EJERCICIO 8 *(20 puntos)* Sea $f(n)$ el número de caminos con n pasos empezando en (0,0), con pasos del tipo (1,0), (-1,0) o (0,1), y nunca autointersectándose, por lo tanto si se desplaza hacia la derecha no puede regresar a la izquierda inmediatamente y viceversa. Por ejemplo, $f(2) = 7$. Suponga que $f(0) = 1$.

1. Plantee una relación de recurrencia o un sistema de relaciones de recurrencias que resuelva el problema.
2. Resuelva la relación de recurrencia o el sistema de relaciones de recurrencias para encontrar una expresión de $f(n)$.

Solución

Equivalentemente, si $D = (1, 0)$, $I = (-1, 0)$ y $A = (0, 1)$ el problema se traduce a contar la cantidad de palabras $B_1B_2B_3 \cdots B_n$ (con $B_i = D, I$ o A) tales que no aparezcan los factores DI ni ID.

Sea $n \geq 2$. Hay $f(n-1)$ palabras de longitud n que terminan en A. Hay $f(n-1)$ palabras de longitud n que terminan en DD, II o AD. Hay $f(n-2)$ palabras de longitud n que terminan en AI. Todas las palabras de longitud mayor o igual a 2 terminan en A, DD, II, AD o AI. Luego,

$$f(n) = 2f(n-1) + f(n-2)\ ,\ f(0) = 1,\ f(1) = 3.$$

La ecuación característica es $r^2 - 2r + 1 = 0$, de donde $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ y $r_2 = 1 - \sqrt{2}$. Así, $f(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ para algunas constantes C_1 y C_2.

Sustituyendo $n = 0$ y $n = 1$ se tiene,

$$C_1 + C_2 = 1 \text{ y } C_1 r_1 + (1 - C_1) r_2 = 3 \text{ y, por lo tanto, } C_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \text{ y } C_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

La expresión de $f(n)$ queda,

$$f(n) = \frac{1}{2}((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}).$$