Matemática Discreta I

Examen

Sábado 6 de febrero de 2016

Número de examen	Nombre y Apellido	Cédula de Identidad

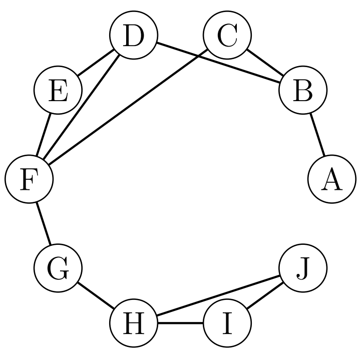
RESPUESTAS				No completar		
1	2	3	4	5	6	7

El examen se aprueba con 60 puntos o más.

EJERCICIOS MÚLTIPLE OPCIÓN (total 40 puntos).

Correctas: 10 puntos, Incorrectas: -2 puntos, Sin responder: 0 puntos.

EJERCICIO 1 Considere el grafo



Opciones:

A) Con la arista $\{A, G\}$ hay un camino hamiltoniano y un ciclo hamiltoniano.

B) Con la arista $\{A, G\}$ hay un camino hamiltoniano y no hay un recorrido euleriano.

C) Con la arista $\{A, H\}$ hay un ciclo hamiltoniano y un recorrido euleriano.

D) Con la arista $\{A, H\}$ hay un ciclo hamiltoniano pero no hay recorrido hamiltoniano.

E) Con la arista $\{A, G\}$ hay un recorrido euleriano y un camino hamiltoniano.

EJERCICIO 2 Sean R y S relaciones sobre un conjunto A, con S reflexiva y antisimétrica. Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. $R \cap R^{-1}$ es relación simétrica, y es reflexiva si y solo si R lo es.
2. $R \circ S$ es reflexiva entonces R lo es.
3. S es orden si y solo si $S^2 \subseteq S$.

Opciones:

A) Todas las afirmaciones son correctas.

B) Todas las afirmaciones son falsas.

C) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.

D) Solo la afirmación (II) es correcta.

E) Solo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.

EJERCICIO 3 En una clase de 30 estudiantes, a 7 no les gusta la música, a 12 les gusta la cumbia (K), a 11 el rock (R) y a 13 la ópera (H). A 6 estudiantes les gusta K y R, a 5 K y H. ¿A cuántos les gusta el rock y la ópera pero no la cumbia?

Opciones: A) 0; B) 2; C) 4; D) 5; E) 6.

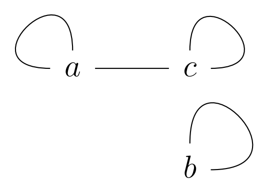
EJERCICIO 4 La cantidad de ciclos de longitud 4 en el grafo completo K_{20} es:

Opciones: A) $\dfrac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{8}$; B) $20!$; C) A_4^{20}; D) $\dfrac{A_4^{20}}{2}$; E) $\dfrac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4}$.

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 60 puntos)

EJERCICIO 5 *(20 puntos)* Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Encontrar una fórmula para A^n.
2. Probar que se cumple para todo $n \geq 1$.
3. ¿Cuántos caminos de longitud 11 existen en el grafo $G = (V, E)$ donde el conjunto de vértices es $V = \{a, b, c\}$, y el de aristas es $E = \{\{a, a\}, \{a, c\}, \{c, c\}, \{b, b\}\}$?



EJERCICIO 6 *(20 puntos)*

Sean $s_n = \sum_{i=0}^{i=n} (i+1)(i+2)(i+3)$ y $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

1. Encontrar la sucesión asociada a $f^3(x)$.
2. Encontrar la sucesión asociada a $\dfrac{6}{(1-x)^4} \times \dfrac{1}{1-x}$.
3. Demostrar que $s_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$.

EJERCICIO 7 *(20 puntos)* Encuentre la solución de la siguiente ecuación en recurrencia

$$a_{n+2} - a_n = 5 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

donde $a_0 = -1$ y $a_1 = 3$.

Ayuda: la forma de la solución particular $a_n^{(p)}$ correspondiente al término $\cos(\alpha n)$ es $A \operatorname{sen}(\alpha n) + B \cos(\alpha n)$.