Matemática Discreta I

Solución del examen

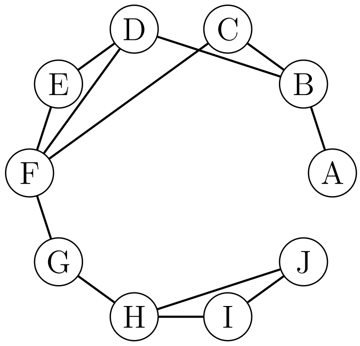
Sábado 6 de febrero de 2016

El examen se aprueba con 60 puntos o más.

EJERCICIOS MÚLTIPLE OPCIÓN (total 40 puntos).

Correctas: 10 puntos, Incorrectas: -2 puntos, Sin responder: 0 puntos.

EJERCICIO 1 Considere el grafo



Opciones:

A) Con la arista $\{A, G\}$ hay un camino hamiltoniano y un ciclo hamiltoniano.

B) Con la arista $\{A, G\}$ hay un camino hamiltoniano y no hay un recorrido euleriano.

C) Con la arista $\{A, H\}$ hay un ciclo hamiltoniano y un recorrido euleriano.

D) Con la arista $\{A, H\}$ hay un ciclo hamiltoniano pero no hay recorrido hamiltoniano.

E) Con la arista $\{A, G\}$ hay un recorrido euleriano y un camino hamiltoniano.

Solución:

"Eulerianeidad"

Observar que al añadir la arista $\{A, G\}$, quedan 4 vértices con grado 3 (B, D, G y H) y el resto tiene grado par. En cambio, si se añade la arista $\{A, H\}$, habrán 2 vértices (B y D) de grado 3 y el resto tendrá grado par. Por lo tanto, en el primer caso, por el Teorema de Euler, no hay ni circuito ni recorrido euleriano. En el segundo caso no hay circuito euleriano pero hay recorrido euleriano: D - E - F - G - H - I - J - H -A - B - C - F - D - B.

"Hamiltoneidad"

Afirmación: No hay ciclo hamiltoniano. Si hubiera un ciclo hamiltoniano (δ), por definición, tiene que incluir todos los vértices del grafo, una sola vez cada uno. Luego, para todo vértice X del grafo, hay exactamente dos aristas incidentes a X, dentro del ciclo δ. En cualquier opción grado(I) = grado(J) = 2, por lo tanto ambas aristas incidentes a cada vértice han de participar del ciclo δ. Esto obliga a formarse un "miniciclo": $I - J - H - I$. En consecuencia no se puede conectar ese miniciclo con el resto de los vértice del grafo dentro del supuesto ciclo hamiltoniano δ (absurdo). Luego, no existe ciclo hamiltoniano en ningún caso.

Por último, en caso de añadir la arista $\{A, G\}$, tendremos el siguiente camino hamiltoniano: J - I - H - G - A - B - C - F - E - D.

Por lo tanto la opción correcta en esta versión del examen, es la B).

EJERCICIO 2 Sean R y S relaciones sobre un conjunto A, con S reflexiva y antisimétrica. Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. $R \cap R^{-1}$ es relación simétrica, y es reflexiva si y solo si R lo es.
2. $R \circ S$ es reflexiva entonces R lo es.
3. S es orden si y solo si $S^2 \subseteq S$.

Opciones:

A) Todas las afirmaciones son correctas.

B) Todas las afirmaciones son falsas.

C) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.

D) Solo la afirmación (II) es correcta.

E) Solo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.

Solución:
Analicemos las afirmaciones.
1.a. $R \cap R^{-1}$ es una relación simétrica:
Una pareja de elementos $(a_1, a_2) \in R \cap R^{-1}$ si y solo si $(a_1, a_2) \in R$ y $(a_1, a_2) \in R^{-1}$. Esto es equivalente a que $(a_2, a_1) \in R^{-1}$ y $(a_2, a_1) \in R$. Equivalentemente $(a_2, a_1) \in R \cap R^{-1}$. Concluimos que esta afirmación es verdadera.
1.b.. $R \cap R^{-1}$ es reflexiva si y solo si R es reflexiva:
($\Leftarrow$) Dado $a \in A$, como R es reflexiva, entonces $(a, a) \in R$ (por lo tanto $(a, a) \in R^{-1}$). Luego $(a, a) \in R \cap R^{-1}$.
($\Rightarrow$) Dado $a \in A$, como $R \cap R^{-1}$ es reflexiva, entonces $(a, a) \in R \cap R^{-1}$. En particular $(a, a) \in R$. Luego R es reflexiva.
Concluimos que esta afirmación es verdadera.
2. $R \circ S$ es reflexiva, entonces R lo es:
Esta afirmación es falsa. Veamos un contraejemplo: sea $A = \{a, b\}$ y consideramos $R = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$ (no es reflexiva) y $S = \{(b, a), (a, a), (b, b)\}$ (es reflexiva y antisimétrica). Así $R \circ S = \{(a, a), (b, a), (a, b), (b, b)\}$, es reflexiva en A.
3. S es una relación de orden si y solo si $S^2 \subseteq S$:
Como S es reflexiva y antisimétrica, para ser orden solo falta verificar la propiedad transitiva. Entonces, la relación S es orden si y solo si S verifica la transitiva y esto último es equivalente a que $S^2 \subseteq S$. Concluimos que esta afirmación es verdadera.
Por lo tanto la opción correcta en esta versión del examen, es la C).

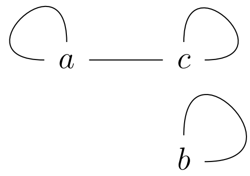
EJERCICIO 3 En una clase de 30 estudiantes, a 7 no les gusta la música, a 12 les gusta la cumbia (K), a 11 el rock (R) y a 13 la ópera (H). A 6 estudiantes les gusta K y R, a 5 K y H. ¿A cuántos les gusta el rock y la ópera pero no la cumbia?
Opciones: A) 0; B) 2; C) 4; D) 5; E) 6.
Solución:
$N(T) = N(H)+N(K)+N(R)-N(RH)-N(RK) - N(KH) + N(HRK)$. Sustituyendo con los valores que se dan, obtenemos: $30 - 7 = 23 = 13 + 12 + 11 - 6 - 5 - N(RH) + N(HRK) \Rightarrow N(RH) - N(HRK) = 2$. Pero $N(RH) - N(HRK)$ es el número de estudiantes que le gusta el rock y la ópera pero no la cumbia. Por lo tanto la opción correcta en esta versión del examen, es la B).

EJERCICIO 4 La cantidad de ciclos de longitud 4 en el grafo completo K_{20} es:
Opciones: A) $\dfrac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{8}$; B) $20!$; C) A_4^{20}; D) $\dfrac{A_4^{20}}{2}$; E) $\dfrac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4}$.
Solución:
Describiremos el ciclo por sus vértices: $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_1$, con $v_i \neq v_j$, si $i \neq j$. Al seleccionar el primer vértice tenemos 20 posibilidades, luego para seleccionar el segundo tenemos 19, tendremos 18 para el tercero y 17 posibilidades para el cuarto vértice. Sin embargo, el ciclo $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_1$ es el mismo ciclo que $v_4 - v_1 - v_2 - v_3 - v_4$. O sea coinciden al rotar los vértices. Lo mismo sucederá al rotar una y otra vez más. Pero también estos ciclos coinciden, por simetría con $v_1 - v_4 - v_3 - v_2 - v_1$, y los "rotados" con sus simétricos. O sea, son iguales: $v_1-v_2-v_3-v_4-v_1 = v_4-v_1-v_2-v_3-v_4 = v_3-v_4-v_1-v_2-v_3 = v_2-v_3-v_4-v_1-v_2 = v_2-v_1-v_4-v_3-v_2 = v_3-v_2-v_1-v_4-v_3 = v_4-v_3-v_2-v_1-v_4 = v_1-v_4-v_3-v_2-v_1$.
Por lo tanto el número de ciclos de longitud 4 en el gafo completo K_{20} es $\dfrac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{8}$, que en esta versión del examen es la opción A).

EJERCICIOS DE DESARROLLO (total 60 puntos)

EJERCICIO 5 *(20 puntos)* Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Encontrar una fórmula para A^n.
2. Probar que se cumple para todo $n \geq 1$.
3. ¿Cuántos caminos de longitud 11 existen en el grafo $G = (V, E)$ donde el conjunto de vértices es $V = \{a, b, c\}$, y el de aristas es $E = \{\{a, a\}, \{a, c\}, \{c, c\}, \{b, b\}\}$?



Solución:

1. Al realizar el producto $A \cdot A$ se obtiene $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. El producto $A \cdot A^2 = A^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$. Observando el patrón, proponemos la fórmula $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ para todo $n \geq 1$. A continuación la demostramos por inducción.

2. Queremos probar que $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$, para cualquier $n \geq 1$. Es claro que para $n = 1$ se obtiene, en efecto, la matriz A.

Supongamos ahora, por hipótesis inductiva que, $A^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix}$. Luego, $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-2} & 0 & 2^{n-2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$. Queda demostrada la fórmula para todo $n \geq 1$.

3. La matriz A del ejercicio, es una matriz de unos y ceros asociada al grafo G. En efecto, se obtiene colocando en la primera fila las conexiones del vértice a, en la segunda las del vértice b y en la tercera las del vértice c. Ahora bien, recordemos que la entrada ij de la matriz A^{11}, es el número de caminos de longitud 11 desde el vértice i hasta el vértice j. Por lo anterior,

$A^{11} = \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 2^{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{10} & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$. Así, por ejemplo, el número de caminos de longitud 11 desde el vértice a al vértice a es $2^{10} = 1024$ y del vértice a al vértice c es 1024 también. Sin embargo, la cantidad de caminos del vértices b al vértice b es 1. Luego, la cantidad total de caminos de longitud 11 en el grafo G es $4 \times 1024 + 1 = 4097$.

EJERCICIO 6 *(20 puntos)*

Sean $s_n = \sum_{i=0}^{i=n} (i+1)(i+2)(i+3)$ y $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

1. Encontrar la sucesión asociada a $f^3(x)$.
2. Encontrar la sucesión asociada a $\dfrac{6}{(1-x)^4} \times \dfrac{1}{1-x}$.
3. Demostrar que $s_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$.

Solución:
1. Notemos que $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$. Derivando dos veces ambos lados, se obtiene,

$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + 4 \cdot 5x^3 + \cdots$$

Dividiendo entre 2 se obtiene $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \dfrac{1 \cdot 2}{2} + \dfrac{2 \cdot 3}{2}x + \dfrac{3 \cdot 4}{2}x^2 + \dfrac{4 \cdot 5}{2}x^3 + \cdots$.

Luego, la sucesión asociada a $f^3(x)$ es $\left\{ \dfrac{(i+1)(i+2)}{2} \right\}_{i=0}^{\infty}$.

2. Calculemos la tercera derivada $f^{(3)}(x)$. Para ello, derivamos ambos lados, una vez más,

$$f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4x + 3 \cdot 4 \cdot 5x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6x^3 + \cdots$$

.

Recordemos que $\dfrac{1}{1-x}$ es el operador suma, es decir, dada una función generatriz $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$, al efectuar la multiplicación $g(x) \times \dfrac{1}{1-x}$ se obtiene

$$a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)x^3 + \cdots$$

Así, la sucesión asociada a $\dfrac{6}{(1-x)^4} \times \dfrac{1}{1-x}$ es

$$\{s_n = \sum_{i=0}^{i=n}(i+1)(i+2)(i+3)\}_{n=0}^{\infty}.$$

3. Es conocido que el enésimo término de la sucesión asociada a la función generatriz $\dfrac{6}{(1-x)^4} \times \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{6}{(1-x)^5}$ es $6 \times C_n^{n+4}$. Por lo tanto,

$$s_n = \sum_{i=0}^{i=n}(i+1)(i+2)(i+3) = 6 \times \frac{(n+4)!}{n!4!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

como se quería demostrar.

EJERCICIO 7 *(20 puntos)* Encuentre la solución de la siguiente ecuación en recurrencia

$$a_{n+2} - a_n = 5 + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

donde $a_0 = -1$ y $a_1 = 3$.

Ayuda: la forma de la solución particular $a_n^{(p)}$ correspondiente al término $\cos(\alpha n)$ es $A\operatorname{sen}(\alpha n) + B\cos(\alpha n)$.

Solución:
Primero calculamos la solución de la ecuación homogénea $a_{n+2} - a_n = 0$. La ecuación característica asociada es $x^2 - 1 = 0$, cuyas soluciones son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Luego,

$$a_n^{(h)} = C_1(1)^n + C_2(-1)^n = C_1 + C_2(-1)^n.$$

Como 1 es solución de la ecuación homogénea, la forma de la solución particular correspondiente a $5 = 5.(1)^n$ es de la forma Cn. La correspondiente al término $\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ es de la forma $A\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + B\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$. Luego, la solución particular tiene la forma

$$
\begin{aligned}
a_{n+2}^{(p)} - a_n^{(p)} &= C(n+2) - Cn + A\,\mathrm{sen}\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + B\cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) - A\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - B\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\
&= 2C + A\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right) + B\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\pi\right) - A\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - B\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\
&= 2C - 2A\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2B\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\\
&= 5 + 0\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Igualando coeficientes de términos correspondientes, se tiene, $C = 5/2, A = 0, B = -1/2$.

Luego, $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = C_1 + C_2(-1)^n + \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Como $a_0 = -1$ y $a_1 = 3$, se tiene:

$$
\begin{gathered}
-1 = C_1 + C_2 + 5/2 - 1/2, \text{ de donde } C_1 + C_2 = -1/2;\\
3 = C_1 - C_2 + 5/2, \text{ de donde } C_1 - C_2 = 1/2.
\end{gathered}
$$

Así, $C_1 = 0$ y $C_2 = -1/2$. Luego, la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$
a_n = -\frac{1}{2}(-1)^n + \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).
$$