

Práctico 4: Principio de Principio del Palomar y de Inclusión-Exclusión.

Ref. Grimaldi 5.5, 8.1 y 8.3

PRINCIPIO DEL PALOMAR

Ejercicio 1 (1^{er} par. mayo de 2017 Ej1 MO) ¿Cuántos estudiantes deben realizar esta prueba para asegurarnos que al menos dos entreguen las mismas respuestas de múltiple opción? Tener en cuenta las posibles respuestas en blanco y que son cuatro opciones por cada una de las seis preguntas.

Ejercicio 2 Demuestre que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

Ejercicio 3 Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, pruebe que deben haber dos que estén a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

Ejercicio 4 Sea $f : A \rightarrow B$ una función, donde $|A| > |B|$. Demuestre que hay al menos $\lceil |A| / |B| \rceil$ puntos del dominio que toman el mismo valor.

Ejercicio 5 (1^{er} Par. setiembre 2009 Ej3)

Se consideran n puntos en un triángulo equilátero de lado 1. ¿Cuál es el n mínimo que garantiza que al menos dos de los puntos se encuentran a distancia menor o igual que $1/2$? (*Observación:* Vale colocar puntos sobre los lados del triángulo).

Ejercicio 6 Demuestre que entre 100.000 personas hay al menos dos que nacieron exactamente al mismo tiempo (hora, minuto y segundo).

Ejercicio 7 Pruebe que al menos uno de m enteros consecutivos es divisible por m .

Ejercicio 8 (Examen Marzo 2003)

Halle el menor natural n tal que dados n dígitos diferentes se puede asegurar que existen dos de ellos cuyos cuadrados diferirán en un múltiplo de 6.

Ejercicio 9 (Examen de Julio 2004 Ej 5)

Sea un tablero de 141 filas y 8 columnas. Cada cuadradito del tablero se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro cuadraditos pintados de negro. Demuestre que hay al menos tres filas con igual secuencia de colores.

Ejercicio 10 Dada una secuencia (x_1, \dots, x_n) de números, decimos que $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ es una subsecuencia si se verifica $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

- a. Mostrar que toda secuencia de $n^2 + 1$ números reales distintos (a_1, \dots, a_{n^2+1}) posee una subsecuencia creciente o bien una decreciente de $n + 1$ números. (*Pique:* considerar el conjunto de pares $\{(x_k, y_k) : 1 \leq k \leq n^2 + 1\}$, siendo x_k (y_k) el tamaño de la mayor subsecuencia creciente (decreciente) que termina en a_k)

- b. Encuentre una secuencia de n^2 números naturales distintos donde el resultado de la parte **a.** no se cumpla.

PRINCIPIO DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN

Ejercicio 11 De 100 estudiantes, 32 estudian matemática, 20 física, 45 biología, 15 matemática y biología, 7 matemática y física, 10 física y biología, 30 no estudian ninguna de las tres materias.

- a. Encuentre el número de estudiantes que estudian las tres materias.
b. Encuentre el número de estudiantes que estudian exactamente una de las tres materias.

Ejercicio 12 ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

Ejercicio 13 ¿Cuántos enteros entre 1 y 9.999.999 inclusive tienen a 31 como suma de sus dígitos?

Ejercicio 14

- a. ¿Cuántos enteros entre 1 y 105 inclusive no son divisibles por ninguno de los enteros 3, 5, 7?
b. ¿Cuántos enteros entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no son divisibles por ninguno de los enteros 5, 7 y 11? (Exam. julio 2000 Ej. 9)

Ejercicio 15 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ si x_i es un entero y

- a. $0 \leq x_i \leq 8$ para todo i ?
b. $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 6$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$?

Ejercicio 16 (Exam. diciembre 2009 Ej3)

Se tira un dado 6 veces. Calcule la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado.

Ejercicio 17 (1^{er} parcial mayo de 2017 Ej5) Hallar la cantidad de permutaciones de 123456 que cumplen que ningún dígito par está en su ubicación original.

Ejercicio 18 Calcule cuántas permutaciones de los dígitos del número 123456789 cumplen que:

- a. Ningún dígito está en su posición original.
b. Los pares no están en su posición original.
c. Los pares no están en su posición natural y la secuencia debe empezar con los dígitos 1, 2, 3, 4 en algún orden.

Ejercicio 19 ¿Cuántas palabras de 4 letras pueden formarse usando las letras A, B, C, D, E si debe aparecer al menos una vocal?