Matemática Discreta I - 2018

Práctico 6

Relaciones de recurrencia

Grimaldi 10.1, 10.2, 10.3 y 10.4

Ejercicio 1 Sea $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ una sucesión que verifica la ecuación:

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ para todo } n \geq 1.$$

a. Halle a_3 si se sabe que $a_0 = 3$.

b. Halle a_0 si se sabe que $a_{10} = 1024$.

c. Halle $\lim a_n/2^n$ si se sabe que $a_0 = 3$.

d. Halle a_3 si se sabe que $\lim a_n/(2^n + 1) = 1$.

e. Halle $\lim a_n/(2^n + 3^n)$.

f. Halle a_3 si se sabe que $\lim a_n/(-2)^n$ existe (y es finito).

(*Aclaración:* en todos los límites $n \to +\infty$)

Ejercicio 2 Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones:

a. $a_{n+1} - 1{,}5a_n = 0, \quad n \geqslant 0.$

b. $a_n - na_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1.$

c. $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2.$

d. (Exam. marzo 2001) $a_n/a_{n-1}^p = 2$, siendo $a_0 = 1$, p positivo diferente de 1.

Ejercicio 3 Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$
con $a_0 = 1, a_1 = 3.$

b. $2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0, \quad n \geqslant 0,$
con $a_0 = 2, a_1 = -8.$

c. $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$
con $a_0 = 7, a_1 = 3.$

d. $a_{n+2} + a_n = 0, \quad n \geqslant 1,$
con $a_0 = 0, a_1 = 3.$

e. $a_{n+2} + 4a_n = 0, \quad n \geqslant 1,$
con $a_0 = a_1 = 1.$

f. $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \quad n \geqslant 2,$
con $a_0 = 5, a_1 = 12.$

g. $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad n \geqslant 2,$
con $a_0 = 1, a_1 = 3.$

h. $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0, \quad n \geqslant 0,$
con $a_0 = 0, a_1 = 1$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 37$, y siendo b y c constantes desconocidas.

i. $a_{n+1} - a_n = 2n + 3, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = 1$.

j. $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = 3$.

k. $a_{n+1} - 2a_n = 5, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = 1$.

l. $a_{n+1} - 2a_n = 2^n, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = 1$.

m. (Exam. marzo 2001) $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3^n, \quad n \geqslant 2,$
con $a_0 = 0, a_1 = 1.$

n. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 3 + 5n, \quad n \geqslant 0.$

ñ. (Parcial 2003) $a_n = 2a_{n-1} + n2^n, \quad n \geqslant 1$, con $a_0 = 1$.

o. (Examen 2016) $a_{n+2} - a_n = 5 + cos(n\frac{\pi}{2}), \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = -1, a_1 = 3$.

p. (Examen 2007) $a_{n+2} - 9a_n = 2 \times 3^n + 5 \times 2^n, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = -1, a_1 = \frac{13}{2}$.

Ejercicio 4 (Primer Parcial 2009)
Sea a_n la sucesión que verifica la ecuación

$$a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n, \qquad a_0 = 1.$$

Indique la opción correcta:

a. $a_{50} = 2^{50}$.

b. $a_{50} = 50 \times 2^{50}$.

c. $a_{50} = 150 \times 2^{50}$.

d.] $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

Ejercicio 5 (Parcial 2001)
Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n \qquad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Halle α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

Ejercicio 6 Exprese a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

a. La cantidad de saludos que se dieron los primeros n invitados de una reunión, si cada vez que llego uno, éste saludo el resto.

b. El número de secuencias de 0s y 1s de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

c. (Exam. marzo 2001) El número de secuencias de As, Bs y Cs de largo n en las cuales no aparecen dos As seguidas.

d. Cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se puede a veces saltar un escalón.

e. Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

f. El número de formas en que una sucesión de unos y doses suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ serían las sucesiones 111, 12 y 21.

g. (Parcial 2010) La cantidad de enteros positivos de hasta n dígitos con $\{0, 1, 2\}$, tales que la suma de sus dígitos es impar.

h. La cantidad de palabras binarias de largo n, que no tienen 3 unos consecutivos.

Ejercicio 7 Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Halle la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

a. No hay restricciones sobre el color de cada franja.

b. Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.

c. Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

Ejercicio 8 Hay n estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuantas formas diferentes pueden quedar esos n estudiantes luego de haber sonado el silvato?

Ejercicio 9 (Examen diciembre 2008) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número:

$$a_n = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

a. Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.

b. Probar que a_n es un entero positivo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 10 Resuelva la siguientes relaciones de recurrencia por el método de las funciones generatrices:

a. $a_{n+1} - a_n = 3^n, \quad n \geq 0,\ a_0 = 1$

b. $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 6$

Ejercicio 11 Resuelva el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n - 4b_n, \\ b_{n+1} = 4a_n + 6b_n \\ n \geq 0,\ a_0 = 1,\ b_0 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 12 (Primer Examen curso 2003)
Sea a_n una sucesión tal que

$$a_{n+4} - 5a_{n+2} + 6a_n = 0, \qquad a_0 = 3, a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9.$$

Indique la opción correcta:

a. $a_{1000} = 2^{1001} + 3^{1000}$.

b. $a_{1000} = 2003$.

c. $a_{1000} = (\sqrt{2})^{1000} + 3(-\sqrt{2})^{1000} - 5(\sqrt{3})^{1000} + (-\sqrt{3})^{1000}$.

d. $a_{1000} = 2^{501} + 3^{500}$.

e. $a_{1000} = 2^{1000} + 2 \cdot 3^{1000}$.

Ejercicio 13 (Examen febrero 2009)
Para un campeonato de fútbol se tiene una cantidad par de equipos participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los equipos juegan exactamente una vez). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ equipos.

a. Calcular a_1, a_2, a_3.

b. Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.

c. Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times \cdots \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

Ejercicio 14 (Examen diciembre 2009)
Resuelva el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ n \geq 0,\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1. \end{cases}$$

Ejercicio 15 Resuelva la siguiente relación de recurrencia por el método de las funciones generatrices: $a_{n+1} - (n+1)a_n = 2^{n+1}, \quad n \geq 0,\ a_0 = 1.$
Comentario: Obtendrá una ecuación diferencial. Para evitarla puede hacer el cambio $a_n = n!b_n$.