

MATEMÁTICA DISCRETA I - 2017.

PRÁCTICO 9

Grafos: caminos, recorridos, circuitos, conexión, subgrafos.

Grimaldi 11.1, 11.2

ALGUNAS DEFINICIONES

Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin aristas múltiples ni lazos. El grafo *completo* K_n tiene n vértices todos unidos entre sí. El *bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n + m$ vértices n de los cuales están unidos a los otros m , y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* P_n tiene n vértices y todo él es un camino simple. El n -*ciclo* C_n tiene n vértices y todo él es un ciclo. El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1. Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos.

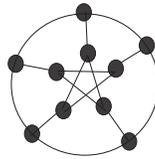


Figura 1: Grafo de Petersen

La *distancia* entre dos vértices a y b de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. Por ejemplo, la distancia entre el vértice “c” y el vértice “m” del grafo de la Figura 3 es 2. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de P_4 es 3 y el de C_5 es 2.

Ejercicio 1 Para el grafo de la Figura 2, determine:

- | | |
|---|--|
| a. Un camino $b - \dots - d$ que no sea un recorrido. | c. Un camino simple $b - \dots - d$. |
| b. Un recorrido $b - \dots - d$ que no sea simple. | d. Un camino cerrado $b - \dots - b$ que no sea un |
| e. Un circuito $b - \dots - b$ que no sea simple. | f. Todos los circuitos simples $b - \dots - b$. |
| g. Todos los recorridos simples $b - \dots - f$. | |

Ejercicio 2

- ¿Cuál es la distancia entre d y los demás vértices del grafo de la Figura 3?
- Halle el diámetro de K_n , $K_{n,m}$, P_n , C_n y el grafo de Petersen (Figura 1).

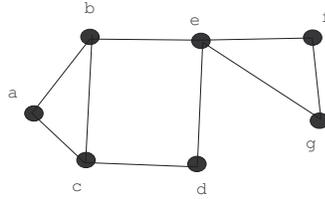


Figura 2

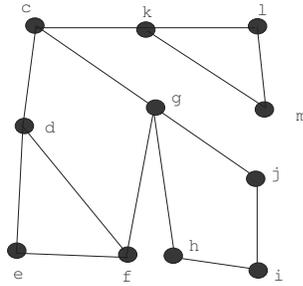


Figura 3

Ejercicio 3 Determine si se cumple o no que:

- K_4 contiene un camino que no es un recorrido.
- K_4 contiene un recorrido que no es ni un circuito ni es simple.
- K_4 contiene un circuito que no es simple.

Ejercicio 4 ¿Cuántos caminos simples tiene P_4 ? ¿Y $K_{1,4}$? ¿Y P_n ? ¿Y $K_{1,n}$?

Ejercicio 5 (Primer parcial-examen 2002)

Sea K_{12} el grafo completo con exactamente 12 vértices. ¿Cuántos caminos simples de longitud 2 tiene K_{12} ?

Ejercicio 6 ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4 ?

Ejercicio 7 Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de n rayos* como el grafo W_n con $n + 1$ vértices v_0, v_1, \dots, v_n tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y v_1, \dots, v_n, v_1 es un ciclo. En la Figura 4 se muestra W_3, W_4 y W_5 .

- ¿Cuántas aristas tiene W_n ?
- ¿Cuántos ciclos de longitud 3 tiene W_3 ? ¿y W_4 ?
- ¿Cuántos ciclos de longitud 4 tienen W_3, W_4 y W_5 ?
- Ídem para ciclos de longitud 5.

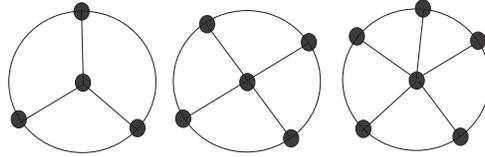


Figura 4

- e. Ídem para ciclos de longitud 6.
- f. Determine cuántos ciclos de longitud k tiene W_n .

Ejercicio 8 Pruebe que si P y Q son dos recorridos simples de longitud la mayor posible, en un grafo conexo, entonces tienen un vértice en común.

Ejercicio 9 Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \dots, 15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G ?

Ejercicio 10 (Segundo examen 2003)

Halle el mínimo número de aristas que hay que quitarle a K_6 para que quede desconectado en 2 componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

Ejercicio 11 Encuentre un grafo G que tenga dos vértices u y v tales que

$$\kappa(G - u) = \kappa(G) \quad \kappa(G - v) > \kappa(G)$$

Ejercicio 12 Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, que están en la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez y se entiende que luego de cruzar uno de estos no vuelve hacia atrás inmediatamente después con el mismo objeto. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos.

- a. ¿Cómo se podrá hacer?
- b. ¿Puede el hombre realizar el proceso si ha de hacer exactamente 20 viajes? (Un viaje es ir de una margen del río a la otra).

Sugerencia: asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.

Ejercicio 13 Sea G el grafo de la Figura 5 (a).

- a. ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
- b. Describa el subgrafo G_1 de G (Figura 5 (b)) como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G .
- c. Ídem para el subgrafo G_2 (Figura 5 (c)).

- d. Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.
- e. Sean e_1 y e_2 las aristas $\{a, c\}$ y $\{a, d\}$ respectivamente del grafo G . Trace los siguientes subgrafos de G : (i) $(G - e_1) - e_2$; (ii) $(G - e_2) - e_1$; (iii) $G - \{e_1, e_2\}$.
- f. Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.
- g. ¿Qué condición o condiciones debe cumplir un subgrafo para no ser inducido?
- h. ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene G ?
- i. ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?
- j. ¿cuántos subgrafos de la parte h) tienen el vértice a como vértice aislado?

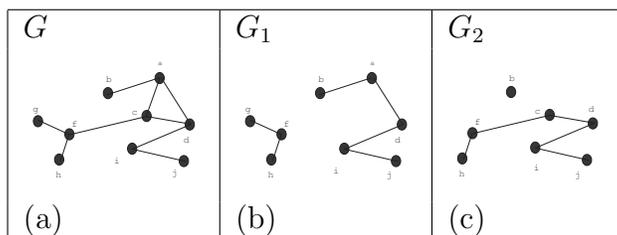


Figura 5

Ejercicio 14 (Examen marzo 2001)

El hipercubo H_n de dimensión n , es el grafo cuyos vértices son las n -uplas de ceros y unos, tales que dos n -uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.

- a. Halle los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.
- b. ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n ?
- c. Halle 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.
- d. Demuestre que H_n no tiene 3-ciclos.
- e. ¿Cuántos 4-ciclos tiene H_n ? (*Sugerencia: considere un vértice fijo y cuente cuántos 4-ciclos pasan por él.*)

Ejercicio 15 Sea G_n el grafo con vértices las n -uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n -uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en G_n , $(0, 0, 1)$ es adyacente a $(1, 1, 1)$ y a $(1, 0, 0)$, pero no a $(1, 1, 0)$.

- a. Dibuje G_2, G_3 y G_1 .
- b. ¿Para qué valores de n es G_n conexo?
- c. ¿Cuántas componentes conexas tiene G_n ?

Sugerencia: sume los 1s de cada vértice.