Matemática Discreta I - 2017

Práctico 8

Relaciones - Segunda Parte.

Relaciones de equivalencia

Ejercicio 1 Sea n un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo n, en la forma:

$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ es divisible por } n.$$

a. Pruebe que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

b. Demuestre que $a \equiv b \Longleftrightarrow a$ y b dan el mismo resto al ser divididos por n.

c. Describa el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$ cuando $n = 3, 2, 1$.

d. Pruebe que $|\mathbb{Z}/\equiv|$ tiene n elementos.

Ejercicio 2 Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea R_n el número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Pruebe que:

a. Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

b. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple,

$$R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n).$$

Ejercicio 3 En cada uno de los siguientes casos, pruebe que R es una relación de equivalencia en A y describa el conjunto cociente A/R:

a. $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

b. (Parcial 2000) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

c. $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^4 y b^4 dan el mismo resto al dividirlos por 5.

d. $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 4 Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto $A = \{0, \ldots, 9\}$ con $\#[0] = 5$, $\#[2] = 3$ y $(2, 0) \notin R$.

Ejercicio 5 Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto $A = \{0, \ldots, 7\}$ con $\#[4] = 2$, $(1, 5) \in R$, $(2, 5) \in R$ y al menos hay 3 clases de equivalencia.

Relaciones de orden

Ejercicio 6 Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas P_0, P_1, ..., P_9 que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_9 > P_7, P_2$; $P_7 > P_6$; $P_6 > P_4$; $P_2 > P_8, P_5$; $P_5 > P_3, P_0$; $P_8 > P_3, P_4$; $P_3, P_4, P_0 > P_1$; donde, por ejemplo, $P_i > P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j. Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

Ejercicio 7 Para ensamblar cierto producto hay que realizar las 11 tareas $T_1, T_2, \ldots, T_{11}$ en el siguiente orden parcial cuyo diagrama de Hasse se muestra en la Figura 1. Escriba una lista de instrucciones de

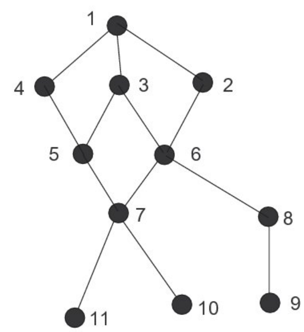


Figura 1

modo tal que, al ejecutarlas según la lista, el resultado final sea el producto correctamente ensamblado.

Ejercicio 8 Considere el conjunto de propiedades $P = \{\text{reflexiva, simétrica, transitiva}\}$. Para cada subconjunto T de P, exhiba un ejemplo de una relación que satisfaga las propiedades de T y no satisfaga las de $P \setminus T$.

Ejercicio 9 ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 2 representa un retículo?

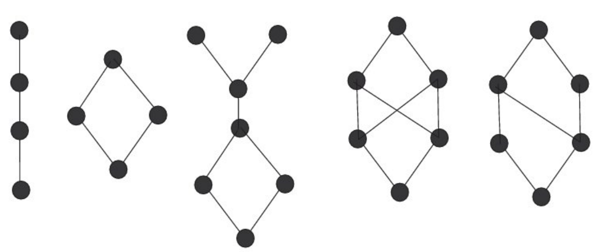


Figura 2

Ejercicio 10 Demuestre que si A es un conjunto finito y $\leq$ es un orden en A entonces A tiene algún elemento maximal y alguno minimal. Demuestre también que si $(A, \leq)$ es un retículo (látice) y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo. ¿Es cierto alguno de estos resultado si A es infinito? (en caso afirmativo dé una demostración y en caso negativo un contraejemplo).

Ejercicio 11 Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibuje el diagrama de Hasse y determine si se trata de un retículo:

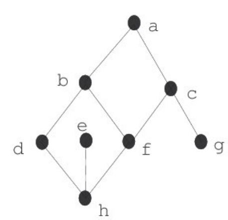
a. $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

b. A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 12 Sea A el conjunto de naturales n mayores que 1 que dividen a 60. Sea R la relación en A definida por: aRb si a divide a b. ¿Es R es un orden parcial? ¿total? ¿retículo? Halle todos los elementos maximales y minimales de (A, R). ¿Cuál es el cardinal más grande de una cadena en (A, R)? ¿Y el de una anticadena? ¿Cuántas cadenas de largo 2 hay?

Ejercicio 13 Muestre que en un conjunto con 61 personas, o bien hay una sucesión de 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente, o bien hay un grupo de 6 personas ninguna de las cuales es descendiente de alguna otra.

Ejercicio 14 (Ej. 2 Primer Parcial 2001)
Se considera el siguiente diagrama de Hasse correspondiente a un orden parcial R definido en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta:



a. (A, R) es un retículo.

b. El elemento a es un máximo; g y f son minimales.

c. Existen exactamente 7 cadenas de cardinal 3, una de las cuales es $\{a, b, h\}$.

Ejercicio 15 Sea A={a,b,c}, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A.

Ejercicio 16 (Segundo Parcial 2009)
Definimos una relación en $I = \{2, 3, 4, 5, ..., 100, 101\}$:

$$x\mathcal{R}y \text{ si } y = x^2 - 1 \text{ o si } y = x.$$

a. La relación es de orden parcial y admite al menos 26 anticadenas con 4 elementos.

b. La relación es de orden total.

c. La relación no es de orden parcial.

d. La relación es de orden parcial y admite una anticadena con 90 elementos, y una cadena con 4 elementos.

e. La relación es de orden parcial y admite una anticadena con 91 elementos.

Ejercicio 17

a. Halle el número de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2); (3, 4)\}$.

b. Ídem para relaciones de orden.

Ejercicio 18 Sea $A = \{1, 2, ..., 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

Ejercicio 19 (Parcial 2000)
Sea M el conjunto de todas las matrices reales $n \times n$. Pruebe que la relación $\sim$ en M definida por:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{ existe } P \in M \text{ invertible tal que } B = PAP^{-1}$$

es de equivalencia. Halle la clase de la matriz nula y la clase de la matriz identidad.

Ejercicio 20 (Ej1 Segundo Examen curso 2001)
Sea R una relación binaria sobre un conjunto con 3 elementos, cuya matriz de 0s y 1s es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & y \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta?:

a. R es una relación de equivalencia si y solo si $x = y = z = w = 1$.

b. Si R es un retículo entonces $y + w \geq 1$.

c. Para cualquier valor de x, y, z y w la relación R es necesariamente un orden parcial.

Ejercicio 21 Sea A un conjunto y R una relación transitiva y reflexiva en A. Considere la relación en A definida por $S = R \cap R^{-1}$. Pruebe que S es una relación de equivalencia y que

$$[a]T[b] \text{ si } aRb$$

define una relación de orden en el conjunto cociente A/S.

Ejercicio 22 (Segundo parcial 2006)
Sea (C, R) un conjunto parcialmente ordenado con un mínimo m y tal que todo subconjunto no vacío posee supremo. Sea $f : C \longrightarrow C$ creciente, es decir, tal que $x\,R\,y$ implica $f(x)\,R\,f(y)$. Se pide

a. Demostrar que existe el supremo de $S = \{x : x\,R\,f(x)\}$. Llamémosle p.

b. Demostrar que para todo $x \in S$, se cumple que $f(x)\,R\,f(p)$.

c. Justificar los cuatro pasos marcados con $*_1$, $*_2$, $*_3$ y $*_4$.

$$\forall x \in S, f(x)\,R\,f(p) \overset{*_1}{\Longrightarrow} f(p) \text{ es cota superior de } S \overset{*_2}{\Longrightarrow} p\,R\,f(p) \overset{*_3}{\Longrightarrow} f(p) \in S \overset{*_4}{\Longrightarrow} f(p) = p.$$