Matemática Discreta I - 2017

Práctico 7

Relaciones - Primera Parte.

Grimaldi 5.1, 7.1 y 7.2

Aclaración: En todos los ejercicios R^{-1} denota la relación inversa, i.e. $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$, y $\overline{R}$ la relación complementaria, i.e., $\overline{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$

Ejercicio 1 Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas ($\forall x, (x, x) \notin R$), simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

a. $R = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4)\}$.

b. $R = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4)\}$.

c. $R = \{(1, 3); (1, 1); (3, 1); (1, 2); (3, 3); (4, 4)\}$.

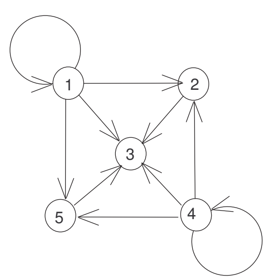
d. $R = \emptyset$.

e. $R = A \times A$.

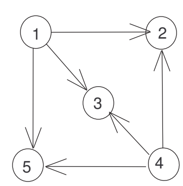
f. Las relaciones cuyas matrices son

i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **ii**) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones dadas por los grafos dirigidos siguientes



i)



ii)

Ejercicio 2 (Parcial 2000)
Halle el número de relaciones R en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$. Construya la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

Ejercicio 3 ¿Cuántas relaciones binarias

a. reflexivas, **b**. simétricas, **c**. asimétricas, **d**. antisimétricas

son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 4 Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

a. Elabore un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R.

b. Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

c. Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, irreflexivas, antisimétricas, asimétricas y transitivas.*

Ejercicio 5 Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a. La composición de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.

b. La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.

c. La composición de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea

Ejercicio 6 (Parcial 2001)
Sea R una relación *compatible* sobre un conjunto no vacío A, es decir, R es reflexiva y transitiva. Considere las relaciones R^{-1} y $S = (R \circ R^{-1}) \cup (R^{-1} \circ R)$. Indique la opción correcta:

a. R^{-1} es compatible, S es simétrica y $R \subseteq S$.

b. R^{-1} no es compatible, S no es simétrica y $R \not\subseteq S$.

c. R^{-1} es un orden parcial y S es irreflexiva.

d. R^{-1} es compatible y S no es simétrica y $R \not\subseteq S$.

e. R^{-1} no es compatible y S es simétrica y $R \subseteq S$.

Ejercicio 7 Clasificar la siguiente relación cuya matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 8 Para cada proposición sobre la relación R definida sobre un conjunto finito A, indique si es verdadera o falsa. Justifique

a. Si R es reflexiva sobre A, entonces $|R| \geq n$.

b. Si $|R| \geq n^2 - k$, con $k < n$ entonces $\exists a \in A$ tal que $(a, a) \in R$.

Ejercicio 9 Sea R relación reflexiva y simétrica; T relación desconocida, y S relación antisimétrica. Indique verdadero o falso, justifique:

a. $R \circ R$ es reflexiva

b. $R \circ R$ es simétrica

c. Si $S \circ R$ es simétrica entonces S es reflexiva

d. $T \cap T^{-1}$ es reflexiva $\leftrightarrow$ T es reflexiva

e. T^2 es simétrica $\leftrightarrow$ T es simétrica