Matemática Discreta I - 2017

Práctico 2: Combinatoria

Ref. Grimaldi Secciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4

Ejercicio 1 ¿Cuántos números naturales pares de tres dígitos distintos (en base diez), existen?
Ejercicio 2 (Ej. 1 parte a. del 1^{er} parcial del 2000)

Halle la cantidad de palabras distintas que pueden obtenerse permuntando las letras de

MOMENTÁNEAMENTE

si la primer letra debe ser O. ¿Y si la primera letra tuviera que ser M u O ?

Ejercicio 3 (Ej. 4 del 2^{do} examen del curso 2001)
Hallar la cantidad n de palabras de 1 a 5 letras que se pueden formar usando las letras de la palabra *CASAS*. (Por ejemplo C y AA son dos palabras posibles, pero CAC no lo es).

Ejercicio 4 (Ej. 2 del 1^{er} parcial del curso 2009)
¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?

Ejercicio 5 ¿De cuántas formas se pueden distribuir las 32 piezas del ajedrez en el tablero sin que los reyes están amenazándose?

Ejercicio 6 Un comité de 10 personas será elegido entre 8 hombres y 8 mujeres. De cuántas formas se puede hacer una selección si

a. No hay restricciones.

b. Debe haber 5 hombres y 5 mujeres.

c. Debe haber un número par de mujeres.

d. Deben haber más mujeres que hombres.

e. Deben haber al menos 6 hombres.

Ejercicio 7 De cuántas formas puede un jugador extraer 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener:

a. Cinco cartas del mismo palo.

b. Cuatro ases.

c. Cuatro cartas del mismo valor.

d. Tres ases y dos sotas.

e. Tres ases y un par.

Ejercicio 8

a. ¿De cuántas maneras se puede particionar un conjunto de 6 elementos en subconjuntos de cardinal 3, 2 y 1 respectivamente? ¿Y si todos los subconjuntos tienen cardinal 2?

b. ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de $2n$ elementos, en n conjuntos de 2 elementos?

Ejercicio 9 En una playa se juntan 13 chicos y deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol, para ello hacer tres equipos de 3 jugadores y uno de 4. Entre los chicos se encuentra uno sumamente habilidoso y otro que es de madera, los restantes 11 jugadores son intermedios. Para equiparar, al habilidoso lo colocan en uno de los equipos de 3 jugadores y al de madera en el equipo de 4 jugadores. Probar que con esa codición existen 46200 posibles formas de armar los equipos.

Ejercicio 10 Demuestre la fórmula de Stifel y escriba las primeras 6 líneas del triángulo de Pascal.

Ejercicio 11 ¿Cuántas palabras distintas pueden construirse (con o sin sentido), usando todas las letras de la palabra ASALAS?

Ejercicio 12 Para una selección de fútbol, fueron convocados 2 goleros, 6 zagueros, 7 mediocampistas y 4 atacantes. ¿De cuántos modos es posible formar una selección con un golero, 4 zagueros, 4 mediocampistas y 2 atacantes?

Ejercicio 13 En una prueba que consta de 10 preguntas, un estudiante decide responder solo 6 con al menos 3 de esas preguntas elegidas de entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

Ejercicio 14 (Ej. de desarrollo del 1^{er} parcial del 2000)
Demuestre la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i} = \binom{N}{n},$$

siendo $k \leq n \leq N$ números naturales.

Ejercicio 15 ¿De cuántas formas diferentes pueden distribuirse r pelotas del mismo color en n cajas diferentes?

Ejercicio 16 ¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Ejercicio 17

a. ¿Cuántas formas hay de sentar 5 niños en 12 sillas puestas en línea?

b. Idem al anterior pero los niños no deben quedar sentados uno junto al otro.

Ejercicio 18

a. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados?

b. ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego del domino?

c. ¿De cuántas maneras diferentes puede una torre de ajedrez, desplazarse desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha?

Ejercicio 19

a. Hallar la cantidad de soluciones distintas (enteros no negativos) de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$$

b. ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el $=$ por un $<$?

Ejercicio 20 ¿Cuántos números en $\{1, 2, 3, \ldots, 100000\}$ tienen la propiedad de que la suma de sus dígitos sea 7?

Ejercicio 21 (Ej. 2 del 1^{er} examen del curso 2001)
Si p es un número primo, hallar la cantidad n de 4-uplas (a, b, c, d) de enteros mayores que 1 cuyo producto es p^{20}. Es decir:

$$n = \left|\{(a, b, c, d) \in (\mathbb{N} \setminus \{1\})^4 : \ a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}d = p^{20}\}\right| .$$

Ejercicio 22

a. Para n y t positivos, probar que el coeficiente en $x_1^{n_1}\ x_2^{n_2}.....\ x_i^{n_i}$ de $(x_1 + x_2 + ... + x_i)^n$ es

$$\frac{n!}{n_1!n_2!....n_i!.}$$

con $(n_1 + n_2 + ... + n_i) = n$.

b. (Ej. 3 del 1^{er} parcial del 2001) Determinar el coeficiente de x^4 en el desarrollo de

$$\left(x^3 - x^2 + x - 1\right)^6 .$$

c. (Ej. 3 del 1^{er} parcial del curso 2000) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de

$$\left(x^5 + x - 1\right)^{10} .$$

d. (Ej. 5 del 2^{do} examen del curso 2001) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio

$$(2x + 4y + 2z + 5)^{14}.$$

Ejercicio 23

a. Hallar la cantidad de subconjuntos de un conjunto con n elementos razonando con la fórmula para del binomio.

b. Probar que:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, C_j^n = 0.$$

c. (Ej. 4 del 1^{er} parcial del 2000) Hallar el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{k=0}^{203} C_k^{203} \, (-4)^k \, .$$