Matemática Discreta I - 2016

Práctico 8

Relaciones - Segunda Parte.

Relaciones de equivalencia

Ejercicio 1 Sea n un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo n, en la forma:

$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ es divisible por } n.$$

(a) Pruebe que $\equiv$ es una relación de equivalencia.
(b) Demuestre que $a \equiv b \Longleftrightarrow a$ y b dan el mismo resto al ser divididos por n.
(c) Describa el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$ cuando $n = 3, 2, 1$.
(d) Pruebe que $|\mathbb{Z}/\equiv|$ tiene n elementos.

Ejercicio 2 Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea R_n el número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Pruebe que:
(a) Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.
(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple,

$$R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n).$$

Ejercicio 3 En cada uno de los siguientes casos, pruebe que R es una relación de equivalencia en A y describa el conjunto cociente A/R:
(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.
(b)(Parcial 2000) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.
(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^4 y b^4 dan el mismo resto al dividirlos por 5.
(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 4 Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto A=$\{0,\ldots,9\}$ con $\#[0] = 5, \#[2] = 3 \quad y\,(2,0) \notin R$

Ejercicio 5 Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia R sobre el conjunto A=$\{0,\ldots,7\}$ con $\#[4] = 2, (1,5) \in R, (2,5) \in R$ y al menos hay 3 clases de equivalencia.

Relaciones de orden

Ejercicio 6 Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas P_0, P_1, ..., P_9 que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_9 > P_7, P_2$; $P_7 > P_6$; $P_6 > P_4$; $P_2 > P_8, P_5$; $P_5 > P_3, P_0$; $P_8 > P_3, P_4$; $P_3, P_4, P_0 > P_1$; donde, por ejemplo, $P_i > P_j$ significa que el programa P_i debe realizarse antes que el programa P_j. Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

Ejercicio 7 Para ensamblar cierto producto hay que realizar las 11 tareas T_1,T_2, ...,T_{11} en el siguiente orden parcial cuyo diagrama de Hasse se muestra en la Figura 1. Escriba una lista de instrucciones de modo tal que, al ejecutarlas según la lista, el resultado final sea el producto correctamente ensamblado.

Figura 1:

Figura 2:

Ejercicio 8 Considere el conjunto de propiedades $P = \{$ reflexiva, antisimétrica, transitiva $\}$. Para cada subconjunto T de P, exhiba un ejemplo de una relación que satisfaga las propiedades de T y no satisfaga las de $P \setminus T$.

Ejercicio 9 ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 2 representa un retículo?

Ejercicio 10 Demuestre que si A es un conjunto finito y $\leq$ es un orden en A entonces A tiene algún elemento maximal y alguno minimal. Demuestre también que si $(A, \leq)$ es un retículo (látice) y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo. ¿Es cierto alguno de estos resultado si A es infinito? (en caso afirmativo dé una demostración y en caso negativo un contraejemplo).

Ejercicio 11 Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibuje el diagrama de Hasse y determine si se trata de un retículo:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 12 Sea A el conjunto de naturales n mayores que 1 que dividen a 60. Sea R la relación en A definida por: aRb si a divide a b. ¿Es R es un orden parcial? ¿total? ¿retículo? Halle todos los elementos maximales y minimales de (A, R). ¿Cuál es el cardinal más grande de una cadena en (A, R)? ¿Y el de una anticadena? ¿Cuántas cadenas de largo 2 hay?

Ejercicio 13 Muestre que en un conjunto con 61 personas, o bien hay una sucesión de 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente, o bien hay un grupo de 6 personas ninguna de las cuales es descendiente de alguna otra.

Ejercicio 14 (Ej. 2 Primer Parcial 2001) Se considera el siguiente diagrama de Hasse correspondiente a un orden parcial R definido en el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones

es correcta:

(I) (A, R) es un retículo.

(II) El elemento a es un máximo; g y f son minimales.

(III) Existen exactamente 7 cadenas de cardinal 3, una de las cuales es $\{a, b, h\}$.

Ejercicio 15 Sea A={a,b,c}, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre A.

Ejercicio 16 (Segundo Parcial 2009) Definimos una relación en $I = \{2, 3, 4, 5, ..., 100, 101\}$:

$$x \mathcal{R} y \text{ si } y = x^2 - 1 \text{ o si } y = x.$$

(A) La relación es de orden parcial y admite al menos 26 anticadenas con 4 elementos;
(B) La relación es de orden total;
(C) La relación no es de orden parcial;
(D) La relación es de orden parcial y admite una anticadena con 90 elementos, y una cadena con 4 elementos;
(E) La relación es de orden parcial y admite una anticadena con 91 elementos.

Ejercicio 17 (a) Halle el número de relaciones de equivalencia en $\{1,2,3,4\}$ que contienen a la relación $\{(1,2);(3,4)\}$.
(b)Ídem para relaciones de orden.

Ejercicio 18 Sea $A = \{1, 2, ..., 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en A?

Ejercicio 19 (Parcial 2000) Sea M el conjunto de todas las matrices reales $n \times n$. Pruebe que la relación $\sim$ en M definida por:

$$A \sim B \Leftrightarrow \text{ existe } P \in M \text{ invertible tal que } B = PAP^{-1}$$

es de equivalencia. Halle la clase de la matriz nula y la clase de la matriz identidad.

Ejercicio 20 (Ej1 Segundo Examen curso 2001) Sea R una relación binaria sobre un conjunto con 3 elementos, cuya matriz de 0s y 1s es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & y \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta?:

(I) R es una relación de equivalencia si y solo si $x = y = z = w = 1$.
(II) Si R es un retículo entonces $y + w \geq 1$.
(III) Para cualquier valor de x, y, z y w la relación R es necesariamente un orden parcial.

Ejercicio 21 Sea A un conjunto y R una relación transitiva y reflexiva en A. Considere la relación en A definida por $S = R \cap R^{-1}$. Pruebe que S es una relación de equivalencia y que

$$[a]T[b] \text{ si } aRb$$

define una relación de orden en el conjunto cociente A/S.

Ejercicio 22 (Segundo parcial 2006) Sea (C, R) un conjunto parcialmente ordenado con un mínimo m y tal que todo subconjunto no vacío posee supremo. Sea $f : C \longrightarrow C$ creciente, es decir, tal que $x\,R\,y$ implica $f(x)\,R\,f(y)$. Se pide

1. Demostrar que existe el supremo de $S = \{x : x\,R\,f(x)\}$. Llamémosle p.
2. Demostrar que para todo $x \in S$, se cumple que $f(x)\,R\,f(p)$.
3. Justificar los cuatro pasos marcados con $*_1$, $*_2$, $*_3$ y $*_4$.

$$\forall x \in S, f(x)\,R\,f(p) \overset{*_1}{\Longrightarrow} f(p) \text{ es cota superior de } S \overset{*_2}{\Longrightarrow} p\,R\,f(p) \overset{*_3}{\Longrightarrow} f(p) \in S \overset{*_4}{\Longrightarrow} f(p) = p.$$