

MATEMÁTICA DISCRETA I - 2016

PRÁCTICO 7

Relaciones - Primera Parte.

Grimaldi 5.1, 7.1 y 7.2

Aclaración: En todos los ejercicios R^{-1} denota la relación inversa, i.e. $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$, y \overline{R} la relación complementaria, i.e., $\overline{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$

Ejercicio 1 Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas ($\forall x, (x, x) \notin R$), simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

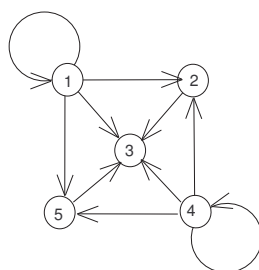
(a) $\{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4)\}$. d (b) $\{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4)\}$.

(c) $\{(1, 3); (1, 1); (3, 1); (1, 2); (3, 3); (4, 4)\}$.

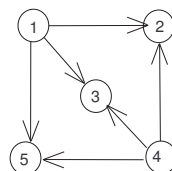
(d) \emptyset .

(e) $A \times A$.

(f) y (g) Para estos puntos tomar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones cuyos grafos dirigidos son:



(f)



(g)

(h) y (i) Las relaciones cuyas matrices son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(h)

(i)

Ejercicio 2 (Parcial 2000) Halle el número de relaciones R en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$. Construya la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

Ejercicio 3 ¿Cuántas relaciones binarias (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) asimétricas, (d) antisimétricas son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 4 Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

- (a) Elabore un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R .
- (b) Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también \overline{R} , R^{-1} , $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?
- (c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas*, *irreflexivas*, *antisimétricas*, *asimétricas* y *transitivas*.

Ejercicio 5 Demuestre o halle un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

- (a) La composición de dos relaciones puede ser una función sin que ninguna de ellas lo sea.
- (b) La inversa de una relación puede ser una función sin que ella misma lo sea.
- (c) La composición de dos relaciones puede dar la relación vacía sin que ninguna de ellas lo sea

Ejercicio 6 (Parcial 2001) Sea R una relación *compatible* sobre un conjunto no vacío A , es decir, R es reflexiva y transitiva. Considere las relaciones R^{-1} y $S = (R \circ R^{-1}) \cup (R^{-1} \circ R)$. Indique la opción correcta:

- (A) R^{-1} es compatible, S es simétrica y $R \subseteq S$.
- (B) R^{-1} no es compatible, S no es simétrica y $R \not\subseteq S$.
- (C) R^{-1} es un orden parcial y S es irreflexiva.
- (D) R^{-1} es compatible y S no es simétrica y $R \not\subseteq S$.
- (E) R^{-1} no es compatible y S es simétrica y $R \subseteq S$.

Ejercicio 7 Clasificar la siguiente relación cuya matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8 Para cada proposición sobre la relación R definida sobre un conjunto finito A , indique si es verdadera o falsa. Justifique

- (a) Si R es reflexiva sobre A , entonces $|R| \geq n$.
- (b) Si $|R| \geq n^2 - k$, $0 < k < n$ entonces $\exists a \in A / (a, a) \in R$.

Ejercicio 9 Sea R relación reflexiva y simétrica; T relación desconocida, y S relación antisimétrica. Indique verdadero o falso, justifique:

- (a) $R \circ R$ es reflexiva
- (b) $R \circ R$ es simétrica
- (c) Si $S \circ R$ es simétrica entonces S es reflexiva
- (d) $T \cap T^{-1}$ es reflexiva $\leftrightarrow T$ es reflexiva
- (e) T^2 es simétrica $\leftrightarrow T$ es simétrica