

PRÁCTICO 11

Grafos III: Planaridad y coloración.

Grimaldi, 11.4 y 11.6.

Ejercicio 1 Dibuje una inmersión en el plano de K_4 , otra del cubo y otra de $K_{2,8}$.

Ejercicio 2 Indique cuales de los multigrafos de la Figura 1 son homeomorfos:

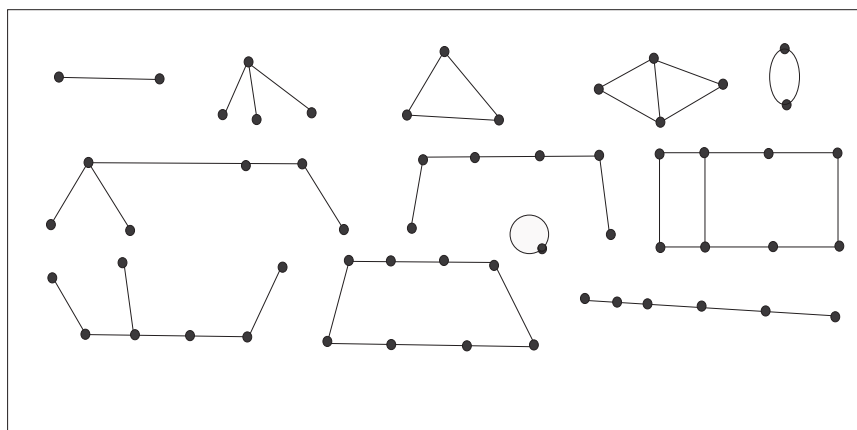


Figura 1:

Ejercicio 3 Para los pares de grafos homeomorfos de la Figura 2 obtenga un tercero desde el cual los dos primeros se obtengan por subdivisiones elementales.

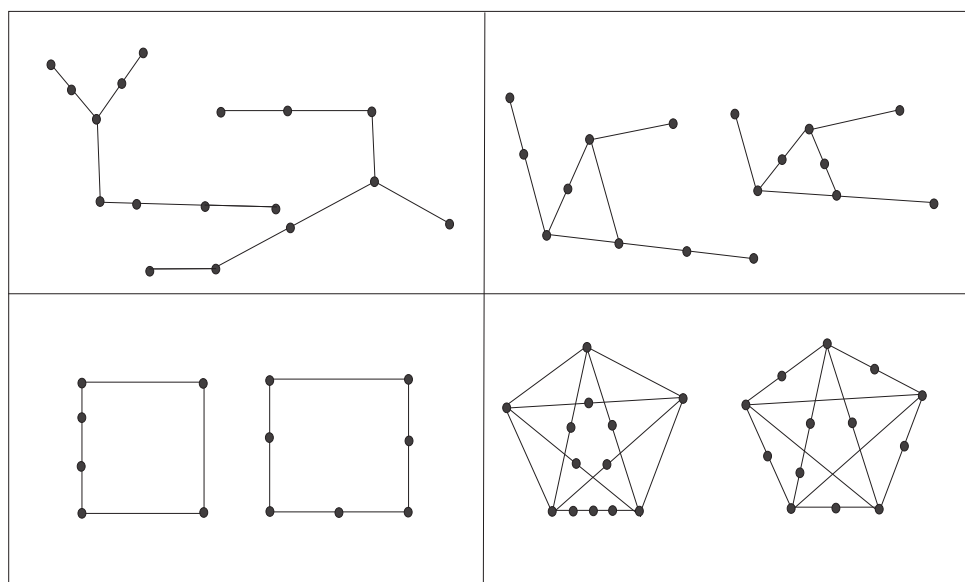


Figura 2:

- Ejercicio 4** a) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene C_4 ?
 b) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$ tiene W_4 ? (W_n son los grafos ruedas definidos en el Ej.8,Pr.7).
 c) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a K_2 tiene un árbol de orden n ?

Ejercicio 5 Muestre que si se elimina cualquier arista de K_5 , el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo $K_{3,3}$?

Ejercicio 6 Determine cuáles de los grafos de la Figura 3 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 , o $K_{3,3}$.

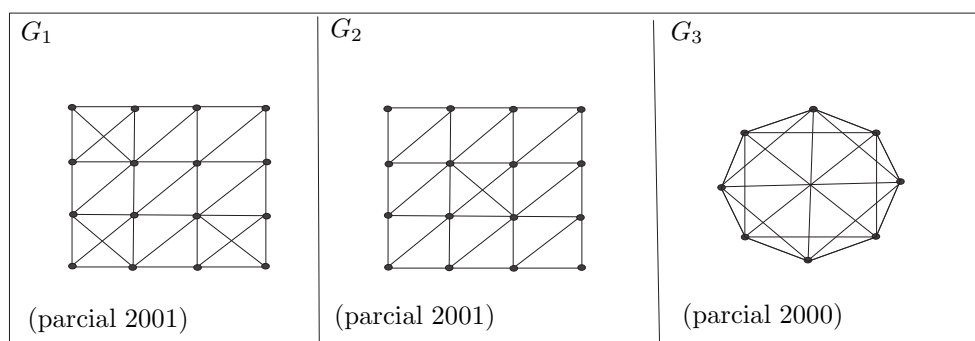


Figura 3:

Ejercicio 7 Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

Ejercicio 8 Determine el número de vértices, aristas y regiones para cada uno de los grafos planos de la Figura 3. Luego muestre que sus respuestas satisfacen el teorema de Euler para grafos planos conexos.

Ejercicio 9 Sea $G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular conexo sin lazos. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de G ?

Ejercicio 10 Suponga que $G = (V, E)$ es un grafo plano con k componentes conexas sin lazos con $|V| = v, |E| = e$. Establezca y demuestre una extensión del teorema de Euler para este grafo.

Ejercicio 11 a) ¿Cuántas aristas tiene un grafo conexo 3-regular plano sin lazos y con ocho vértices?,
 b) Dibuje un grafo que satisfaga las condiciones de la parte anterior y otro que las satisfaga todas menos la de ser plano.

Ejercicio 12 Sea $G = (V, E)$ un grafo plano y cuyas inmersiones planas determinan 53 regiones. Si para alguna inmersion plana de G cada región tiene al menos cinco aristas en su frontera, demuestre que $|V| \geq 82$.

Ejercicio 13 a) Demuestre que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.
 b) Demuestre que todo grafo plano con menos de 30 aristas tiene un vértice de grado 4 o menor.
 c) Demuestre que en toda inmersion de un grafo plano y conexo con 6 vértices y 12 aristas, cada una de las regiones está limitada por 3 aristas.
 d) Demuestre que para todo grafo conexo G con 11 o más vértices, o bien él o su complemento \overline{G} no es plano.

COLORACIONES

Ejercicio 14 Encuentre el número cromático de los siguientes grafos.

- a) El grafo bipartito completo $K_{m,n}$.
- b) El ciclo C_n , para $n \geq 3$.
- c) Los grafos de la Figura 4.

Ejercicio 15 a) Pruebe que si $\chi(G) = 2$ entonces G no tiene ciclos impares.

- b) Pruebe que si G no tiene ciclos impares entonces $\chi(G) = 2$.

Ejercicio 16 En los laboratorios químicos JJ, Juanita recibe tres embarques que contienen un total de siete sustancias químicas diferentes. La naturaleza de estas sustancias es tal que para todo $1 \leq i \leq 5$, la sustancia i no puede almacenarse en el mismo compartimiento que la sustancia $i + 1$ o la $i + 2$. Determine el menor número de compartimientos separados que Juanita necesitará para almacenar en forma segura estas siete sustancias.

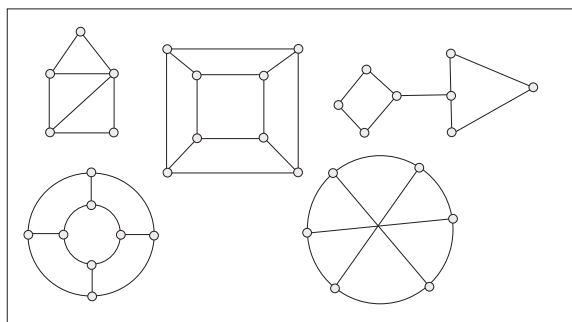


Figura 4:

Ejercicio 17 a) Determine $P(K_{1,3}, \lambda)$.

b) ¿Cuál es el polinomio cromático de $K_{1,n}$? ¿Cuál es su número cromático?

c) ¿Cuáles son los polinomios cromáticos de P_n ?

d) ¿Cuál es el polinomio cromático de un árbol con n nodos?

e) A partir de la parte anterior encuentre el número cromático de un árbol con n nodos.

Ejercicio 18 Hallar el polinomio cromático de $K_{2,n}$.

Ejercicio 19 a) Determine los polinomios cromáticos para los grafos de la Figura 5.

b) Encuentre $\chi(G)$ para cada grafo.

c) Si se dispone de cinco colores, ¿cuántas coloraciones propias de los vértices de cada grafo existen?

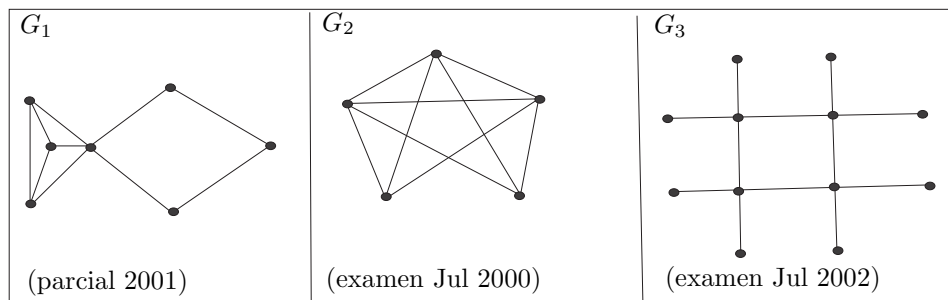


Figura 5: