1 Problema 2

En todo este problema se cumplen las siguientes relaciones: $\omega_0 = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

a) Escribimos el circuito en Laplace en la figura 1

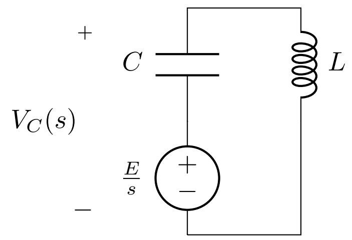

Figura 1: Circuito en Laplace

Resolviendo usando divisor de voltaje:

$$V_C(s) = \frac{Ls}{Ls + \frac{1}{Cs}} \frac{E}{s} = E \frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} = E \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Antitransformando: $\boxed{v_C(t) = E\cos(\omega_0 t)Y(t)}$

b) Escribimos el circuito en Laplace en la figura 2

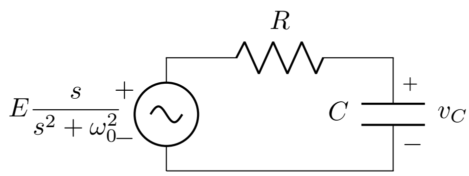

Figura 2:

Nuevamente usando divisor de voltaje y fracciones simples:

$$V_C(s) = E \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = E \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \frac{\omega_0}{s + \omega_0} = E \left(\frac{A}{s + \omega_0} + \frac{Bs + C\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right)$$

Por tapadita podemos sacar:

$$A = \frac{-\omega_0^2}{2\omega_0^2} = -\frac{1}{2}$$

Haciendo factor común e igualando coeficiente de polinomios nos quedan la condiciones $A + B = 0$ por el coeficiente de orden 2 y $A + C = 0$ por el coeficiente de orden 0. Por lo tanto $B = C = -A = \frac{1}{2}$

Por lo tanto al antitransformar:

$$\boxed{v_c(t) = \frac{E}{2}\left(-e^{-\omega_0 t} + \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\right) Y(t)}$$

c) Durante el primer intervalo ($t < t_1 = \frac{2\pi}{\omega_0}$), tenemos dos circuitos independientes como los de las partes anteriores. El de la izquierda es como el de la parte a con condición inicial nula y el de la derecha idéntico y en las mismas condiciones que la parte b. Por lo tanto en este intervalo se cumple:

$$v_{C_1}(t) = \frac{E}{2}\left(-e^{-\omega_0 t} + \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t)\right) \quad (1)$$

$$v_{C_2}(t) = 0 \quad (2)$$

$$v_s(t) = = v_{C_1}(t) \quad (3)$$

$$i_s(t) = 0 \quad (4)$$

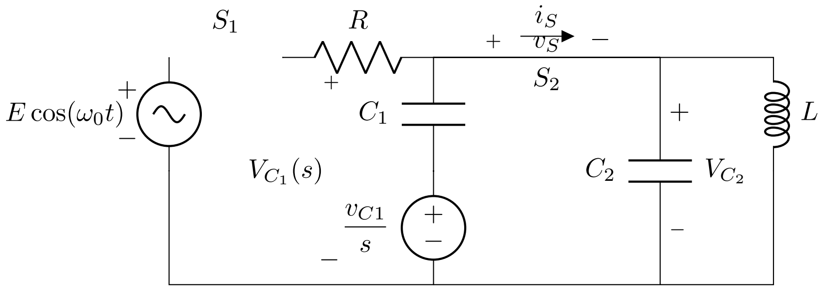

Figura 3:

En el instante en que las llaves cambian su estado, las condiciones iniciales de los condensadores son:

$$V_{C_1}(t_1^-) = v_{C1} = \frac{E}{2}\left(1 - e^{-2\pi}\right) \tag{5}$$

$$V_{C_2}(t_1^-) = v_{C2} = 0 \tag{6}$$

En la figura 3 escribimos el circuito en Laplace del último intervalo.

$$V_{C_1}(s) = V_{C_2}(s) = \frac{v_{C1}}{s}\frac{1}{1+\frac{1}{Cs}\left(\frac{1}{Ls}+Cs\right)} = \frac{v_{C1}s}{2s^2+\frac{1}{LC}} = \frac{v_{C1}}{2}\frac{s}{s^2+\frac{\omega_0^2}{2}}$$

Por lo tanto, definiendo $t' = t - t_1$ en este intervalo:

$$v_{C_1}(t) = v_{C_2}(t) = \frac{v_{C1}}{2}\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t'\right) = E\frac{1-e^{-2\pi}}{4}\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t - \sqrt{2}\pi\right)$$

Claramente $v_S = 0$ y falta hallar i_S.

$$I_S(s) = \left(\frac{v_{C1}}{s} - V_{C_1}(s)\right)Cs = \left(\frac{v_{C1}}{s} - \frac{v_{C1}}{2}\frac{s}{s^2+\frac{\omega_0^2}{2}}\right)Cs \tag{7}$$

$$= v_{C1}C\left(1 - \frac{1}{2}\frac{s^2}{s^2+\frac{\omega_0^2}{2}}\right) = \frac{v_{C1}C}{2}\frac{s^2+\omega_0^2}{s^2+\frac{\omega_0^2}{2}} \tag{8}$$

$$= \frac{v_{C1}C}{2}\left(1 + \frac{\frac{\omega_0^2}{2}}{s^2+\frac{\omega_0^2}{2}}\right) = \frac{v_{C1}}{2R\omega_0}\left(1 + \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\frac{\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}}{s^2+\frac{\omega_0^2}{2}}\right) \tag{9}$$

$$= \frac{v_{C1}}{2R}\left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}}{s^2+\frac{\omega_0^2}{2}}\right) \tag{10}$$

Pasando al tiempo:

$$i_S(t') = \frac{v_{C1}}{2R}\left(\frac{1}{\omega_0}\delta(t') + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t'\right)Y(t')\right)$$

Resumiendo:

$$v_{C_1}(t) = \frac{E}{2}\begin{cases} -e^{-\omega_0 t} + \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) & t \in [0, t_1) \\ \frac{1-e^{-2\pi}}{2}\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t - \sqrt{2}\pi\right) & t \geq t_1 \end{cases} \tag{11}$$

$$v_{C_2}(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_1) \\ E\frac{1-e^{-2\pi}}{4}\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t - \sqrt{2}\pi\right) & t \geq t_1 \end{cases} \tag{12}$$

$$v_S(t) = \begin{cases} -e^{-\omega_0 t} + \cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t) & t \in [0, t_1) \\ 0 & t \geq t_1 \end{cases} \tag{13}$$

$$i_S(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_1) \\ E\frac{1-e^{-2\pi}}{4R}\left(\frac{1}{\omega_0}\delta(t-t_1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t - \sqrt{2}\pi\right)\right) & t \geq t_1 \end{cases} \tag{14}$$