Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2017**

Examen – Martes 6 de febrero de 2018

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del examen es 3 horas y media.
- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.

(I) Múltiple opción. Total: 30 puntos

Puntajes: 6 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

Ejercicio 1

Considere la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por la intersección de la superficie $S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = b^2x^2 + a^2y^2\right\}$, con la superficie $S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1,\ z \in \mathbb{R}\right\}$, donde $a, b \neq 0$. Indique la opción correcta:

A) La curva tiene curvatura nula para todo $a, b \neq 0$.

B) La curva tiene torsión nula para todo $a, b \neq 0$.

C) Existen $a, b \neq 0$ tales que la curvatura no es constante y la torsión es distinta de cero en algún punto.

D) Para cualquier par de valores $a, b \neq 0$, la curvatura es igual a la torsión en todo punto.

Ejercicio 2

Sea U la región del espacio definida por $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje z}\}$. Sea $F : U \to \mathbb{R}^3$ un campo C^1.
Considere las siguientes afirmaciones:

(I) Si el campo F es de gradientes entonces $\oint_{\mathcal{C}} F dl = 0$ para toda curva $\mathcal{C}$ cerrada simple en U.

(II) Si F es irrotacional entonces F es de gradientes.

(III) Si existe $Y : U \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}(Y) = F$ entonces F es solenoidal.

Entonces:

A) Todas las afirmaciones son verdaderas.

B) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

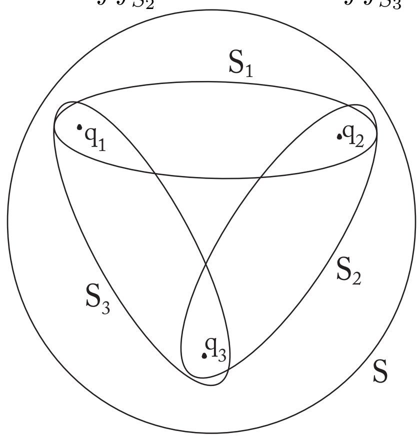
C) Sólo la afirmación (I) es verdadera.

D) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

Ejercicio 3

Sean $F_1 : \mathbb{R}^3 \setminus \{q_1\} \to \mathbb{R}^3$, $F_2 : \mathbb{R}^3 \setminus \{q_2\} \to \mathbb{R}^3$, y $F_3 : \mathbb{R}^3 \setminus \{q_3\} \to \mathbb{R}^3$, campos solenoidales tales que los respectivos flujos salientes a través de las superficies cerradas S_1, S_2 y S_3 que se indican en la figura son:

$$\iint_{S_1} F_1 \cdot dS = \pi\,, \iint_{S_2} F_2 \cdot dS = 2\pi\,, \iint_{S_3} F_3 \cdot dS = 4\pi.$$



Se define el campo $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{q_1, q_2, q_3\} \to \mathbb{R}^3$ como: $G = 2F_1 - F_2 + F_3$.
Entonces el flujo saliente del campo G a través de la superficie cerrada S que se indica en la figura, $\iint_S G \cdot dS$, es:

A) 4π.
B) 6π.
C) -2π.
D) 0.

Ejercicio 4

Sea V el volumen encerrado por el plano $z = 0$ y la superficie $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Considere el campo vectorial $F(x, y, z) = \big(x\cos^2(z)\,, y\sin^2(z)\,, z\sqrt{x^2+y^2}\big)$. Entonces, si la superficie ∂V está orientada con normal exterior a V, el flujo saliente de F a través de ∂V, $\iint_{\partial V} F \cdot dS$, es:

A) $\frac{\pi}{2}$.
B) $\frac{4\pi}{3}$.
C) 2π.
D) π.

Ejercicio 5

Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + xyz.$$

Considere además la 1-forma diferencial $\omega(x, y, z) = f(x, y, z)dx$.
Indique la opción correcta:

A) $df \wedge \omega = 0$.
B) $df \wedge \omega = x^2(x + yz)\big(ydzdx + zdxdy\big)$.
C) $df \wedge \omega = x^2(x + yz)\big(ydzdx - zdxdy\big)$.
D) $df \wedge \omega = (x^2 + xyz)dxdydz$.

(II) Desarrollo. Total: 70 puntos

Problema 1 (30 puntos)

Considere el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$F(x, y, z) = (f(x^2 + y^2 + z^2)x\,,\ f(x^2 + y^2 + z^2)y\,,\ f(x^2 + y^2 + z^2)z),$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$.

a) (**6 puntos**) Calcule $\mathrm{rot}(F)$.

b) (**10 puntos**) Sea S_a la esfera de radio $a > 0$. Considere $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple contenida en dicha esfera. Pruebe, usando el Teorema de Stokes, que $\int_{\mathcal{C}} F\, dl = 0$.

c) (**14 puntos**) Considere finalmente $\mathcal{C}_{OA}$, una curva de extremos $O = (0, 0, 0)$ y $A = (0, 0, a)$, con $a > 0$, regular a trozos, recorrida desde O hacia A. Pruebe que:

$$\int_{\mathcal{C}_{OA}} F\, dl = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} f(t)\, dt.$$

Problema 2 (40 puntos)

En este problema se consideran funciones (escalares y vectoriales) de clase C^2, definidas sobre todo $\mathbb{R}^3$

Para una función escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se define el operador laplaciano como la siguiente función:
$\nabla^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$.
Análogamente, si $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, el operador laplaciano de F es el campo:
$\nabla^2 F(x, y, z) = (\nabla^2 F_1(x, y, z)\,,\ \nabla^2 F_2(x, y, z)\,,\ \nabla^2 F_3(x, y, z))$.

a) (**12 puntos**) Pruebe la identidad vectorial:

$$\nabla^2 F = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}(F)) - \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}(F))\,.$$

Sugerencia: Trabaje cada componente de los vectores por separado.

Las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell en el vacío, para un campo eléctrico E y un campo magnético H que dependen de las coordenadas espaciales (x, y, z) y también del tiempo t, son:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(E) &= 0 \\ \mathrm{div}(H) &= 0 \\ \mathrm{rot}(E) &= -\frac{\partial H}{\partial t} \\ \mathrm{rot}(H) &= \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned}$$

b) (**6 puntos**) Pruebe que si $F(x, y, z, t) = (F_1(x, y, z, t), F_2(x, y, z, t), F_3(x, y, z, t))$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^2$ entonces: $\mathrm{rot}(\frac{\partial F}{\partial t}) = \frac{\partial\, \mathrm{rot}(F)}{\partial t}$.

Nota: El rotor está definido solamente sobre las coordenadas espaciales (x, y, z).

c) (**14 puntos**) Use los resultados anteriores para probar que el campo eléctrico E cumple la ecuación de ondas, esto es: $\nabla^2 E - \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$.

d) (**8 puntos**) Análogamente pruebe que el campo magnético H también cumple la ecuación de ondas, esto es: $\nabla^2 H - \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0$.