Universidad de la República — **Cálculo 3**

Facultad de Ingeniería - IMERL — **Segundo Semestre 2017**

EXAMEN – SÁBADO 9 DE DICIEMBRE DE 2017

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

- La duración del examen es 3 horas y media.
- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.

El siguiente dato puede ser de utilidad:

- El determinante jacobiano en coordenadas esféricas es: $r^2\sin(\theta)$, donde r es la coordenada radial y θ es el ángulo medido con respecto al eje z.

(I) Múltiple opción. Total: 30 puntos

Puntajes: 6 puntos si la respuesta es correcta, -3 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes:

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5

Ejercicio 1

Considere la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por la intersección de la superficie $(x-a)^2+(y-b)^2=1$, $z\in\mathbb{R}$, con la superficie $z=x^2+y^2$, donde $a,b\in\mathbb{R}$. Indique la opción correcta:

A) La curva tiene torsión nula y curvatura constante $\forall a,b\in\mathbb{R}$.

B) Si $a=b=0$ entonces la curva tiene torsión nula.

C) Existen $a,b\in\mathbb{R}$ tales que la curva posee curvatura constante y torsión distinta de cero en algún punto.

Ejercicio 2

Considre la región $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ comprendida entre dos superficies esféricas concéntricas, S_1 de radio a y S_2 de radio b, con $a<b$.

Sea $F:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo C^1.

Considere las siguientes afirmaciones:

(I) Si F es solenoidal entonces existe un campo $A:\Omega\to\mathbb{R}^3$ tal que $F=rot(A)$.

(II) Si F es irrotacional entonces existe una función escalar $\phi:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que $F=\nabla\phi$.

(III) F es conservativo si y sólo si es de gradientes.

Entonces:

A) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

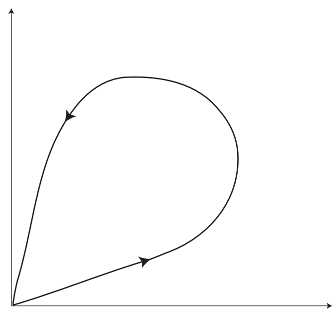
B) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

C) Sólo la afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

Ejercicio 3

El área encerrada por la curva plana (que se muestra en la figura) $\alpha(t) = (t - t^3\,,\, 2t^3 - 2t^5)$, con $0 \le t \le 1$, es:

A) $\frac{11}{15}$.
B) $\frac{5}{6}$.
C) $\frac{1}{12}$.

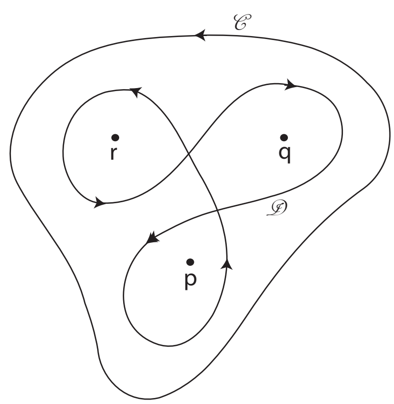


Ejercicio 4

Sean $F_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2$, $F_2 : \mathbb{R}^2 \setminus \{q\} \to \mathbb{R}^2$, y $F_3 : \mathbb{R}^2 \setminus \{r\} \to \mathbb{R}^2$, campos irrotacionales tales que

$$\oint_{\mathcal{C}} F_1 \cdot ds = 2\pi, \quad \oint_{\mathcal{C}} F_2 \cdot ds = 3\pi, \quad \oint_{\mathcal{C}} F_3 \cdot ds = -\pi,$$

donde $\mathcal{C}$ es la curva que se muestra en la figura:



Se define el campo $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{p, q, r\} \to \mathbb{R}^2$ como: $G = 3F_1 + 2F_2 + F_3$.
Entonces $\oint_{\mathcal{D}} G \cdot ds$ (siendo $\mathcal{D}$ la curva de la figura) es:

A) 4π.
B) 13π.
C) $-\pi$.

Ejercicio 5

Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo definido por: $F(x, y, z) = \left(z^2 x\,,\, \frac{1}{3}y^3 + e^{z^2}\,,\, x^2 z\right)$.
Considere la superficie $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, z \ge 0\right\}$, orientada de manera que las normales tienen componentes z positivas.
Entonces el flujo del campo F a través de S, $\displaystyle\iint_S F \cdot dS$, es:

A) $\frac{2\pi}{5}$.
B) 0.
C) -2π.

(II) Desarrollo. Total: 70 puntos

Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

Problema 1 (40 puntos)

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto y conexo y $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo.

a) (**4 puntos**) Defina campo conservativo y campo de gradientes.

b) (**8 puntos**) Pruebe que si F es de gradientes entonces es conservativo, y exprese la integral de camino entre dos puntos cualesquiera en términos del potencial escalar.

c) (**16 puntos**) Pruebe que si F es conservativo entonces es de gradientes, y exprese el potencial escalar explícitamente en términos de F.

Considere ahora $\Omega = \mathbb{R}^3$ y una fuerza $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ correspondiente a un campo de gradientes: esto es, asuma que existe un potencial escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla\phi$.

Considere por otra parte una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza F, siguiendo una curva $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, con $t \in \mathbb{R}$. La Segunda Ley de Newton establece que:

$$F(\alpha(t)) = m\alpha''(t).$$

Se define finalmente la energía de la partícula bajo la acción de la fuerza $F = \nabla\phi$ como la siguiente función de $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = \frac{1}{2}m \parallel \alpha'(t) \parallel^2 - \phi(\alpha(t)).$$

d) (**12 puntos**) Pruebe que la energía es una constante que no depende de t. Esto es: pruebe que se cumple $E'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Problema 2 (30 puntos)

Considere el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$F(x, y, z) = (h(x)[\alpha \sin(z) + \beta \cos(z)]\,, \, h(x)[\alpha \cos(z) - \beta \sin(z)]\,, \, \sin(z) + \cos(z)),$$

donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) (**4 puntos**) Calcule $rot(F)$.

b) (**12 puntos**) Obtenga los valores de α, β y calcule la función h para que $rot(F) = F$ en todo $\mathbb{R}^3$, con la condición $F(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$.

Considere ahora el campo F definido por las condiciones anteriores. Considere además la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$, orientada de manera que las normales tienen componentes z positivas.

c) (**14 puntos**) Use el Teorema de Stokes para calcular el flujo de F a través de S, esto es: $\iint_S F \cdot dS$.