## **Ejercicio 3** (25 puntos)

a) Consideremos $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si $\sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$ es la representación por serie de potencias de $f$ centrada en $z_0$, probar que el radio de convergencia es mayor o igual a $R$.
*Sugerencia: expresar $a_n$ en función de $f^{(n)}(z_0)$ y utilizar la estimativa de Cauchy para acotar la serie en cualquier disco $D(z_0, R')$, siendo $R' < R$.*

## **Ejercicio 3** (25 puntos)

a) Si $R' < R$, $f$ es holomorfa en $D(z_0, R')$, y $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.
Utilizando la estimativa de Cauchy, resulta que:

$$
\begin{aligned}
|f(z)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}||(z - z_0)|^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R'^n}|z - z_0|^n,
\end{aligned}
$$

siendo $M = \text{máx}_{z \in \overline{D}(z_0, R')} |f(z)|$. Es claro que la serie converge si $|z - z_0| < R'$, por lo que el radio de convergencia es mayor que o igual a $R$.