Práctico 3 Ejercicios 2.b) y 2.d)

Expandir en series de potencias las funciones

$$\frac{1}{(1+z)^5} \quad y \quad \frac{z+2}{(1+3z)^2}$$

Lemas útiles para este objetivo:

$$\text{(Serie geométrica)} \sum_{n=0}^{\infty} k^n z^n = \frac{1}{1-kz} \tag{1}$$

$$\text{(Derivada n-ésima)} \left(\frac{1}{1-kz}\right)^{(n)} = \frac{n! \cdot k^n}{(1-kz)^{n+1}} \tag{2}$$

Demostración de (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n z^n = 1 + kz \sum_{n=0}^{\infty} k^n z^n \iff (1-kz)\sum_{n=0}^{\infty} k^n z^n = 1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} k^n z^n = \frac{1}{1-kz} \qquad \square$$

Demostración de (2): Por inducción en n.

Paso base, n=1:

$$\left(\frac{1}{1-kz}\right)' = \frac{k}{(1-kz)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1-kz}\right)' = \left((1-kz)^{-1}\right)' = (-1)(-k)(1-kz)^{-2} = \frac{k}{(1-kz)^2} \qquad \square$$

Paso inductivo:

$$\left(\frac{1}{1-kz}\right)^{(n)} = \frac{n! \cdot k^n}{(1-kz)^{n+1}} \implies \left(\frac{1}{1-kz}\right)^{(n+1)} = \frac{(n+1)! \cdot k^{n+1}}{(1-kz)^{n+2}}$$

$$\left(\frac{1}{1-kz}\right)^{(n+1)} = \left(\left(\frac{1}{1-kz}\right)^{(n)}\right)' == \left(\frac{n! \cdot k^n}{(1-kz)^{n+1}}\right)' = n! \cdot k^n \left(\frac{1}{(1-kz)^{n+1}}\right)' =$$

$$= \frac{n! \cdot k^n (n+1)k}{(1-kz)^{n+2}} = \frac{(n+1)! \cdot k^{n+1}}{(1-kz)^{n+2}} \qquad \square$$

Ejercicio 2.d) Paso 1: separar en 2 factores.

$$\frac{z+2}{(1+3z)^2} = (z+2)\frac{1}{(1+3z)^2}$$

Paso 2: hallar una serie de potencias para $\frac{1}{(1+3z)^2}$

Por el lema (2), si $k = -3$ y $n = 1$, tenemos que:

$$\left(\frac{1}{1+3z}\right)' = \frac{-3}{(1+3z)^2} \iff \frac{1}{(1+3z)^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+3z}\right)'$$

Por el lema (1), si $k = -3$ tenemos que:

$$\frac{1}{1+3z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-3z)^n \implies \left(\frac{1}{1+3z}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-3z)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} -3n(-3z)^{n-1}$$

$$\implies -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+3z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(-3z)^{n-1} \implies \frac{z+2}{(1+3z)^2} = (z+2)\sum_{n=1}^{\infty} n(-3z)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}nz^n + \sum_{n=1}^{\infty}2(-3)^{n-1}nz^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}nz^n + \sum_{n=0}^{\infty}2(-3)^n(n+1)z^n$$

Hallemos el radio de convergencia de las series:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

$$a_n^1 := (-3)^{n-1}n \implies \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n(n+1)}{3^{n-1}n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{n} = 3 \qquad \therefore R_1 = \frac{1}{3}$$

$$a_n^2 := 2(-3)^n(n+1) \implies \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n+1}(n+2)}{2\cdot 3^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+2)}{n+1} = 3 \qquad \therefore R_2 = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 2.b)

Por el lema (2), si $k = -1$ y $n = 4$, tenemos que:

$$4!(-1)^4\frac{1}{(1+z)^5} = \left(\frac{1}{1+z}\right)^{(4)}$$

Por el lema (1), si $k = -1$, tenemos:

$$\frac{1}{(1+z)^5} = \frac{1}{24}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right)^{(4)} = \frac{1}{24}\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)(n-3)(-z)^{n-4} =$$

$$= \frac{1}{24}\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)(n-3)(-1)^n z^{n-4}$$

Si hacemos el cambio de variable $h = n - 4$, obtenemos:

$$\frac{1}{(1+z)^5} = \frac{1}{24}\sum_{h=0}^{\infty}(h+4)(h+3)(h+2)(h+1)(-1)^h z^h$$

Radio de convergencia:

$$a_h := (h+4)(h+3)(h+2)(h+1)(-1)^h \implies$$

$$\lim_{h\to\infty}\frac{|a_{h+1}|}{|a_h|} = \lim_{h\to\infty}\frac{(h+5)(h+4)(h+3)(h+2)}{(h+4)(h+3)(h+2)(h+1)} = \lim_{h\to\infty}\frac{h+5}{h+1} = 1 \qquad \therefore R = 1$$