Ejercicio 2-Práctico 4

Letra

Sea $f(z) = \sqrt{|xy|}$ con $z = x + iy$. Verificar que se cumplen las ecuacioones de Cauchy-Riemman en el origen pero f no es derivable en el origen.

Ecuaciones de Cauchy-Riemman

Dado $f(z) = \sqrt{|xy|}$ podemos escribir a $f(x+iy) = u(x+iy)+iv(x+iy)$ siendo $u(x+iy) = Re(f(z))$ y $v(x+iy) = Im(f(z))$. Entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemman establecen que una función holomorfa en un punto z_0 cumplen lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Tenemos que $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$ y $v(x,y) = 0$. Por lo tanto para cumplirse las ecuaciones de Cauchy-Riemman en el origen se debe cumplir:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0 \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0 \end{cases}$$

Procedemos a cálcular las derivadas parciales de $u(x,y)$

- $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$
- De la misma manera se llega a que $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$

$\Rightarrow$ se concluye que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemman en el origen.

Derivada en el origen

$f(z)$ es derivable en el origen $\Leftrightarrow \exists \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0}$. Podemos ver a $z \to 0$ como $(x,y) \to (0,0)$ (ya que $z = x + iy$). Entonces calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x+iy) - f(0,0)}{x+iy}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}(x-iy)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}(x)}{x^2+y^2} - iy\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}$$

Vamos a tomar la restricción $y = mx$ para probar que ese límite no existe y por lo tanto la función no es holomorfa en $(0,0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|mx^2|}x}{x^2(m+1)} - i\frac{\sqrt{|mx^2|}mx}{x^2(m+1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|m|\,|x^2|}x}{x^2(m+1)} - i\frac{\sqrt{|m|\,|x^2|}mx}{x^2(m+1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|\,\sqrt{|m|}x}{x^2(m+1)} - i\frac{\sqrt{m}\,|x|\,mx}{x^2(m+1)} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{m}}{m+1} + i\frac{\sqrt{m}m}{m+1}, x \to 0^- \\ \\ \frac{\sqrt{m}}{m+1} - i\frac{\sqrt{m}m}{m+1}, x \to 0^+ \end{cases}$$

Por lo tanto vemos que el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ depende de la pendiente de la recta que estemos tomando, por ende el límite general no existe y se concluye que la función **NO** es derivable en 0.

Se pude concluir además que a pesar de cumplirse las ecuaciones de Cauchy-Riemman el teorema no es aplicable ya que u(x,y) no es diferenciable en (0,0).