Funciones de variable compleja

Segundo parcial, 11 de julio de 2014

$\mathbf{N^o}$ **Parcial**

Apellidos **Nombres** **Nº de Cedula**

Problema 1.

a. Consideramos el polinomio $p(z) = z^5 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{2}$, y el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \in (\frac{1}{2}, 1)\}$. ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación $p(z) = -1$ en el conjunto A ? Justifica tu respuesta.
b. Sean α y β dos curvas dadas por $\alpha(t) = e^{it}$ y $\beta(t) = \frac{1}{2}e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Se considera $\gamma = P \circ \alpha$ y $\delta = p \circ \beta$. Calcular $Ind_\gamma(-1)$ y $Ind_\delta(-1)$ justificando cada paso.

Problema 2.

Probar que si f es una función entera no constante sin ceros entonces existe una sucesión $\{z_n\}$ tal que $|z_n| \to +\infty$ y $f(z_n) \to 0$. Dar un ejemplo de una función y una sucesión que cumplan lo anterior.

Problema 3.

Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ una sucesión no constante, tal que $z_n \to \bar{z} \in \Omega$,

a. Demostrar que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f(z_n) = 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ entonces $f \equiv 0$
b. Deducir que si f y g son dos funciones holomorfas en Ω tales que $f(z_n) = g(z_n) \; \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $f(z) = g(z) \; \forall\, z \in \Omega$
c. Indicar si existe una función holomorfa en el disco unidad que cumpla $f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$

Problema 4.

Calcular enunciando los resultado que utilice

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+2)(x^2+1)} dx$$