Esquema de solución

Ejercicio 1

1. $X_k = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^k}, \frac{y}{(x^2+y^2)^k}, 0\right)$. Resolviendo $div(X) = 0$ notamos que esto se cumple si y sólo si $(x^2 + y^2)^{k-1}(2x^2 + 2y^2 2kx^2 - 2ky^2) = 0$ si y sólo si $k = 1$.

2. Consideramos $\varphi : [0, 2\pi) \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ una parametrización del cilindro. Notar que $\varphi_u \wedge \varphi_v = (\cos(u), \sin(u), 0)$. Con esto se tiene

$$\int_S \langle X_1, n\rangle \, dA = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \langle (\cos(u), \sin(u), 0); (\cos(u), \sin(u), 0)\rangle du\, dv = 4\pi.$$

3. Notar que si consideramos $(P, Q, R) = \left(\frac{yz}{x^2+y^2}, \frac{-xz}{x^2+y^2}, 0\right)$, se tiene que $rot((P, Q, R)) = X_1$, (P, Q, R) es de clase C^2 y definido en el mismo dominio que X.

Ejercicio 2

1. Por un lado aplicamos Gauss: $\int_{S(t)} \langle X, n\rangle dA = \int_{V(t)} divX$. Por otro lado como $divX$ es una función de clase C^0, aplicamos teo. Valor Medio al miembro de la derecha, con lo que existe $p_t \in V(t)$ tal que $\int_{V(t)} divX = divX(p_t) \cdot Vol(V(t))$. Entonces $divX(p_t) = \frac{1}{Vol(V(t))} \int_{S(t)} \langle X, n\rangle dA$. Ahora al tomar límite cuando $t \to 0$, se tiene que $p_t \to p$ y entonces $divX(p) = \text{lím}_{t\to 0} \frac{1}{Vol(V(t))} \int_{S(t)} \langle X, n\rangle dA$.

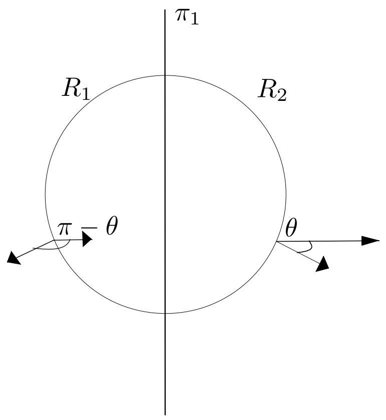
2. $(\Rightarrow)$. Como X es de rotores, $divX = 0$, aplicando Gauss tenemos que $\int_S \langle X, n\rangle dA = 0$.
$(\Leftarrow)$. Sea p el centro de una esfera $S(t)$, por hipótesis $\int_S \langle X, n\rangle dA = 0$, aplicando la parte anterior

$$divX(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{Vol(V(t))} \underbrace{\int_{S(t)} \langle X, n\rangle dA}_{=0} = 0$$

Entonces para todo p se tiene $divX(p) = 0$. Como X está definido en todo $\mathbb{R}^3$, existe potencial vectorial y X es de rotores.

Ejercicio 3

1. Cubo: Llamemos F_1 yF_2 a las dos caras del cubo ortogonales al campo. Entonces $\int_{C_1} \langle X, n\rangle dA = \int_{F_1} \langle X, n\rangle dA + \int_{F_2} \langle X, n\rangle dA$, pues en las restantes caras el flujo es 0 dado que es ortogonal a la normal de cara. Notar que el flujo en F_1 es negativo y el flujo en F_2 es positivo, además como el módulo del campo es mayor en F_2 se tiene $\int_{C_1} \langle X, n\rangle dA > 0$.
Cilindro: En las caras superiores e inferiores el flujo es cero, en la cara lateral (que llamaremos R), visto de arriba tenemos la siguiente figura:
Sea π_1 un plano ortogonal al campo que pasa por el eje del cilindro, π_1 determina dos regiones sobre la



cara lateral del cilindro R_1 y R_2. Sea π_2 un plano colineal con el campo y ortogonal a las tapas, entonces $\langle X(p), n(p)\rangle|_{\pi_2 \cap R_1} = \|X\| \cos(\pi - \theta)$ y $\langle X(p), n(p)\rangle|_{\pi_2 \cap R_2} = \|X\| \cos(\theta)$. Como el módulo del campo en R_2 es mayor que en R_1 y $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ obtenemos que $\int_{C_2} \langle X, n\rangle dA = \int_{R_1} \langle X, n\rangle dA + \int_{R_2} \langle X, n\rangle dA$ y el valor de la integral de R_2 es mayor que el valor de la integral en R_1.

2. Definimos por ejemplo el campo $X(x, y, z) = e^y(0, 1, 0)$. Es fácil verificar que cumple las condiciones requeridas.

3. Si existe X en las condiciones anteriores tal que $divX = 0$ entonces al estar definido en todo $\mathbb{R}^3$, en toda superficie cerrada el flujo debe ser cero. Por la parte anterior vemos que esto no sucede, entonces X no puede ser solenoidal.