Ejercicios para la materia Teoría de Juegos Evolutivos con aplicaciones

1a. Lista

Junio-julio 2018

Ejercicio 1 *Considere un juego 2×2 cono estrategias puras S_1 y S_2 respectivamente, y con retornos defindos por $\pi : S_1 \times S_2 \to R$. Una transformación afín generalizada para el jugador 1, es una transformación de los retornos definida de la siguiente forma:*

$$\pi_1'(s_1, s_2) = \alpha_1 \pi_1(s_1, s_2) + \beta_1(s_2), \forall s_1 \in S_1$$

siendo $\alpha_i > 0$ y $\beta_i(s_j) \in R$. Nótese que es posible aplicar distintas transformaciones para cada estrategia posible del jugador 2. Análogamente una transformación afín para el jugador 2, es una transformación de la siguiente forma:

$$\pi_2'(s_1, s_2) = \alpha_2 \pi_2(s_1, s_2) + \beta_2(s_1), \forall s_2 \in S_2.$$

Muestre que si los retornos se modifican por transformaciones afines generalizadas, el conjunto de los equilibrios de Nash no se modifican.

Ejercicio 2 *En una isla remota, los habitantes realizan intercambios comercilaes mediante dos objetos: granos de café y piedritas rosadas. Cada persona puede elegir como moneda para el intercambio de productos, uno u otro de estos objetos. Pero las transacciones solamente se terminan si las 2 personas que realizan el intercambio comercial usan el mismo objeto como moneda. Supongamos que una transacción efectuada da a los involucradas una satisfación absoluta igual a 1 y 0 si no se realiza por ser haber elegido los individuos distintas monedas. Suponga que la poblalción se distribuye de acuerdo a $\mathbf{x} = (x, 1-x)$ siendo x el porcentaje de indivduos de la población que usan granos de café. Asuma que los individuos se entrecruzan aleatoriamente para realizar intercambios. Suponga que cada individuo usa una estrategia $\sigma = (p, 1-p)$ es decir que cada indivduo usa (en porcentage) p veces granos de café, y $(1-p)$ veces piedritas rosadas.*

1. *Muestre que si $x > \frac{1}{2} \Rightarrow p = 1$ corresponde a una mejor respuesta, y que la estrategia correspondiente a $p = 1$ se maximiza si $x = 1$. Muestre que $\sigma = (1, 0)$ en una población $\mathbf{x} = (1, 0)$ es un ESS para todo epsilon $< \frac{1}{2}$.*

2. *Análogamente si $x < \frac{1}{2}$.*

3. *Analice el caso restante $x = \frac{1}{2}$ muestre que $\sigma = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es el único candiato a ESS, pero que finalmente no es ESS.*

Ejercicio 3 *Considere el juego con retornos representados en la tabla:*

	A	B	C
A	$0,0$	$1,-2$	$1,1$
B	$-2,1$	$0,0$	$3,1$
C	$1,1$	$1,3$	$0,0$

1. *Muestre que una población polimórfica donde $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es asintóticamente estable en la dinámica del replicador.*

2. *No obstante la estrategia $\sigma^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ no es ESS. (Ayuda: considere $\sigma = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.)*

Ejercicio 4 *Considere el juego* roca, papel y tijera. *Sea x_1 la proporción de $R-$estrategistas, x_2 la proporción de $S-$ estrategistas, y x_3 la de $P-$estrategistas.*

1. *Obtenga la dinámica del replicador.*

2. *Estudie la estabilidad de los puntos fijos.*

3. *Suponga ahora que existe un costo en caso de empate, para ambos jugadores igual a c, (retornos = (-c,-c)). Muestre que en este caso $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es asintóticamente estable.*

Ayuda: Si la derivada de la función de entropía relativa es positiva (a lo largo de la solución) entences el punto fijo es inestable. Si se anula entonces cicla alrededor del punto fijo.

Ejercicio 5 *Considere el juego simétrico de dos personas, dado por la matriz de pagos:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Obtenga todos los equilibrios de Nash.*

2. *Analice la estabilidad asintótica de dichos equilibrios.*

Ejercicio 6 *Considere el siguiente juego de tipo dilema del prisionero, con matriz de pagos:*

	C	D
C	$3,3$	$0,5$
D	$5,0$	$4,4$

1. *Encuentre las ESS.*

2. *Plantee la dinámica del replicador.*

3. *Analice la estabilidad de los puntos fijos.*