ALN – Métodos Iterativos Básicos

In. Co.
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Introducción

- Los métodos directos para resolver sistemas de ecuaciones lineales:
  - ☺
    - Llegan a la solución en un número específico de pasos, en función del tamaño del sistema a resolver.
    - Consiguen, a menos de errores numéricos, la solución exacta del sistema lineal.
  - ☹
    - Son demasiado costosos y se vuelven prohibitivos para matrices grandes!!

Introducción

- Métodos iterativos:
  - Buscan aproximar la solución mediante una sucesión generada iterativamente.
  - La solución exacta al problema es $x^* = A^{-1}b$ entonces buscamos una sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$

Introducción

- Métodos iterativos:
  - Si el método converge se obtiene una solución aproximada del problema, cuyo error satisface algún criterio prefijado.
  - Es importante asegurar la convergencia y estimar tasa de convergencia (error al aumentar k).

Introducción

- Cuando detener la iteración ?!
  - Dependiendo del error !!! Pero no conocemos x^*
  - $r_k = b - Ax_k$

$$\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|} < tol$$

Introducción

Cuando detener la iteración ?!

- Estamos trabajando en una máquina !!!, hay una precisión alcanzable !!!
- Es del orden de $\varepsilon_{mach} \times \kappa(A) \times \|b\|$

Punto fijo

- Reescribimos el problema como una iteración de punto fijo.

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

- La matriz B se denomina matriz de amplificación

Diferentes familias

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

- Estacionarios: *B* y *c* no dependen de *k.* Generalmente más sencillos de implementar pero con menos capacidad de convergencia.
- No estacionarios

Métodos estacionarios

Deducción

Agregamos una matriz M invertible:

$$Ax = b \Leftrightarrow Mx = (M - A)x + b$$

Y consideramos la siguiente recursión:

$$Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b \qquad (1)$$

Deducción

Partiendo de una solución inicial x_0. Si la solución converge tendremos:

(2) $$Mx^{(\infty)} = (M - A)x^{(\infty)} + b \Leftrightarrow Ax^{(\infty)} = b$$

Deducción

Si se resta (2) de (1) se obtiene:

$$M(\underbrace{x^{(\infty)} - x^{(k+1)}}_{e^{(k+1)}}) = (M - A)(\underbrace{x^{(\infty)} - x^{(k)}}_{e^{k}})$$

$$e^{(k+1)} = M^{-1}(M - A)e^{(k)}$$

Deducción

$$M^{-1}(M - A) = -M^{-1}A = Q$$

$$e^{(k+1)} = Qe^{(k)} = Q^k e^{(0)}$$

Por lo tanto:

$$e^{(k)} \xrightarrow[k]{} 0 \leftrightarrow \left\|Q^k\right\| \xrightarrow[k]{} 0$$

Convergencia

<u>Propiedad 1</u>

Una condición suficiente para lo anterior es que para alguna norma se tenga que $\|Q\|$ <1.

Demostración:

En ese caso basta utilizar la propiedad de norma de matriz que dice:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \rightarrow \left\|Q^k\right\| \leq (\|Q\|)^k$$

Convergencia

<u>Propiedad 2</u>

La condición necesaria y suficiente es que el radio espectral de Q sea menor que 1.

Demostración: (suficiencia)

$$\rho(Q) < 1$$

Sea μ un valor propio de Q y v el vector propio de norma 1 correspondiente.

Tenemos $\left\|Q^k v\right\| = ||\mu^k v|| = |\mu^k| \rightarrow 0$ entonces $\left\|Q^k\right\| \rightarrow 0$

Convergencia

Propiedad 2 (necesidad)

Si $||Q^k|| \to 0$ y v es un vector propio de norma 1, entonces:

$||Q^k v|| \leq ||Q^k||$ por lo tanto $||Q^k v|| \to 0$

$||Q^k v|| = |\mu^k|$ para algún valor propio μ y como $|\mu^k| \to 0$ entonces $\mu < 1$

Convergencia

Propiedad 3 (velocidad de convergencia)

Si llamamos $q^k = \dfrac{\left\| e^{(k+1)} \right\|}{\left\| e^{(k)} \right\|}$

Para matrices Normales se cumple que $q^{(k)} \approx \rho(Q)$

Para otros tipos de matriz es más difícil de determinar

Método de Jacobi

Consiste en tomar la matriz M como la diagonal de A (si a_{ii} != 0) en cuyo caso la inversa de M es trivial

$$x_i^{(k)} = \frac{(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j^{(k-1)})}{a_{i,i}}$$

Método de Jacobi

- En forma matricial el método es equivalente a:

$$x^{(k)} = D^{-1}(-L-U)x^{(k-1)} + D^{-1}b$$

donde D es la matriz diagonal, L es la matriz triangular inferior y U es la triangular superior

Método de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{(b_i - \sum_{j<i} a_{i,j} x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{i,j} x_j^{(k-1)})}{a_{i,i}}$$

Método de Gauss-Seidel

- En forma matricial el método es equivalente a:

$$x^{(k)} = (D+L)^{-1}(-Ux^{(k-1)} + b)$$

donde D es la diagonal, L es la parte triangular inferior y U es la triangular superior de A. (A=L+D+U)

Comparación de los métodos

- Jacobi, no se necesitan conocer las componentes del vector previamente calculadas.
- En general la velocidad de convergencia del método Gauss-Seidel es mayor a la de Jacobi.

Convergencia

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x = b$

- Jacobi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + b \rightarrow x^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q} x^{(k)} + \frac{b}{2} \qquad \lambda_i = \pm\frac{1}{2}$$

- Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(k)} + b \rightarrow x^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{Q} x^{(k)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} b \qquad \lambda_i = 0, \frac{1}{4}$$

Otras variantes

Backward GS

GS simétrico

Relajación SOR

SSOR

SOR (Succesive Over-Relaxation)

- Se basa en aplicar una extrapolación al método de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = w\tilde{x}_i^{(k)} + (1-w)x_i^{(k-1)}$$

  - Aquí $\tilde{x}_i^{(k)}$ es la iteración de GS y *w* es un parámetro definido de antemano.
  - La idea es que el parámetro mejore la velocidad de convergencia de GS.
  - Es difícil conocer el *w* óptimo
  - *Kahan* demostró que el método solo converge para $w \in (0,2)$