ALN – Ordenamientos

In. Co.
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Motivación

- Los métodos directos de resolución de sistemas lineales son costosos.
- Al trabajar con matrices dispersas, si en el proceso de factorización se pierde la dispersión se transforman en inviables los métodos. (fill-in)
- Para atacar el problema se utilizan estrategias de reordenamiento.

Ejemplo de la importancia de los ordenamientos…

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & & & & & & \\ x & & x & & & & & \\ x & & & x & & & & \\ x & & & & x & & & \\ x & & & & & x & & \\ x & & & & & & x & \\ x & & & & & & & x \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{LU} = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{PA} = \begin{pmatrix} x & & & & & & & x \\ & x & & & & & & x \\ & & x & & & & & x \\ & & & x & & & & x \\ & & & & x & & & x \\ & & & & & x & & x \\ & & & & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{LU} = \begin{pmatrix} x & & & & & & & x \\ & x & & & & & & x \\ & & x & & & & & x \\ & & & x & & & & x \\ & & & & x & & & x \\ & & & & & x & & x \\ & & & & & & x & x \\ x & x & x & x & x & x & x & x \end{pmatrix}$$

- Tres familias de estrategias:
  - **Globales**: parten del problema en su totalidad y lo van dividiendo en nuevos sub-problemas de ordenamiento, hasta obtener instancias con soluciones triviales.
  - **Locales**: van tomando un pivote a la vez en base a la información local disponible, actualizando luego el resto de la sub-matriz, para continuar con el cálculo del orden de los restantes pivotes.
  - **Híbridas**

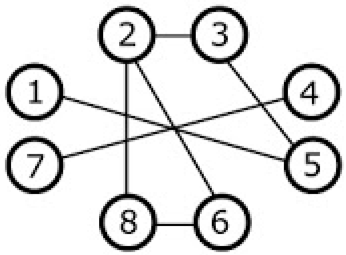
Globales

- Cuthill y McKee (CM)
  - Su objetivo fue minimizar el ancho de la banda de las matrices.
  - La estrategia procede por niveles:
    - Tomando el vértice v de menor grado y el conjunto L1=AdjG(v) de vértices adyacentes a v.
    - Posteriormente se toma el conjunto L2 compuesto por los vértices adyacentes a los vértices de L1 que no pertenezcan a L1 y así sucesivamente hasta completar todos los vértices.
    - En cada nivel se ordenan los vértices en base al menor grado, asignándoles a los vértices de cada clase números correlativos.

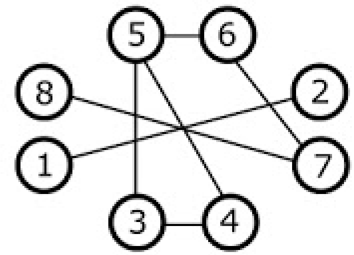
Globales

- Cuthill y McKee (CM)

Old node label	New node label
7	1
4	2
8	3
6	4
2	5
3	6
5	7
1	8



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Globales

Reverse Cuthill y McKee (RCM)

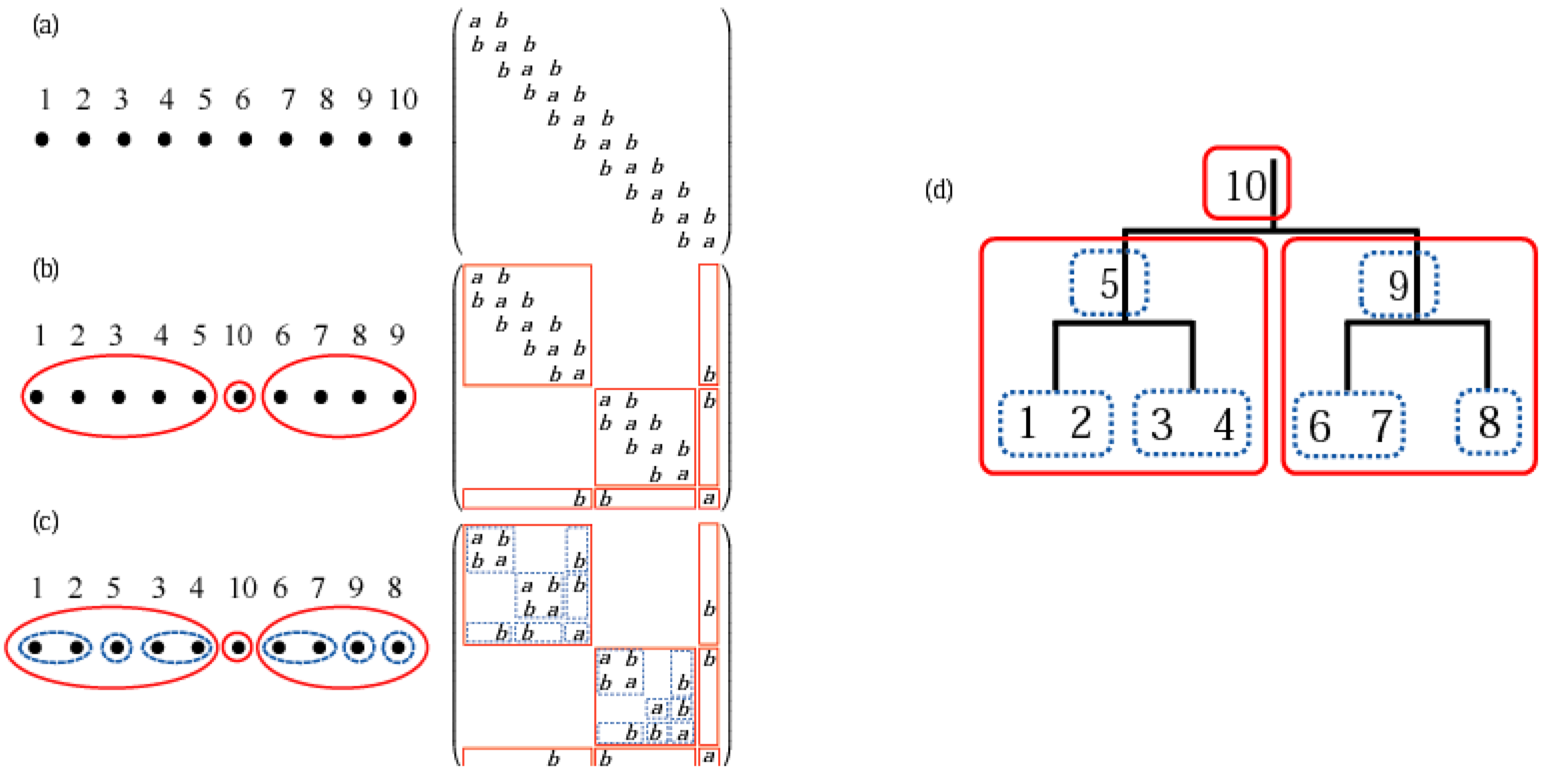
- George propuso utilizar el ordenamiento inverso de Cuthill McKee y emplear una forma eficiente de encontrar los nodos periféricos.

Globales

Disección recursiva (Nested Dissection)

- La esencia del método es recursiva, particionando la grilla por un conjunto divisor (que se numera a posteriori) en partes balanceadas, y a cada parte se le aplica recursivamente la heurística.

Globales



Globales

Variantes de Disección recursiva (ND)

- En el año 1978 George y Liu presentaron la disección recursiva automática (automatic nested dissection - AND).
- El método fue extendido en el año 1979 por Lipton et al. y luego por Gilbert en el año 1980, presentando el método recursiva generalizado (generalized nested dissection - GND) definiendo un nuevo separador.

Locales

- Generalmente asociadas a estrategias voraces

Locales
Markowitz

- Fill-in local mínimo (Minimum Local Fill- MF) o deficiencia mínima (Minimum Deficiency).
- El algoritmo busca en cada paso minimizar deficiencia, es decir, la cantidad de aristas necesarias para convertir al conjunto de vértices adyacentes a un vértice v en un clique, valor que se corresponde con el fill-in al eliminar el vértice v.
- Se puede demostrar que la heurística deficiencia mínima obtiene ordenes con mínimo fill-in para grafos cordales.

Locales

Markowitz

- Si bien los ordenamientos obtenidos con deficiencia mínima son mejores que los obtenidos con otras estrategias locales, el alto costo de cómputo que implica la heurística condicionó su desarrollo.
- En los últimos años algunos autores han propuesto variantes aproximadas de deficiencia mínima buscando obtener buenos ordenamientos con un menor costo computacional.
  - fill-in local mínimo aproximado (approximate minimum local fill - AMF)
  - fill-in local mínimo promedio (approximate minimum mean local fill -AMMF)
  - mínima deficiencia modificada Modified Minimum Deficiency MMDF).

Locales

S2

- Contraparte para matrices simétricas del algoritmo de Markowitz. Se basó en estimar el fill-in usando las entradas distintas de cero por fila y por columna de la sub-matriz pendiente de factorizar.
- La formula para estimar el fill-in en el pivote a_{ii} es $(c_i - 1)*(r_i - 1)$, siendo c_i la cantidad de entradas no nulas en la columna i y r_i la cantidad de entradas en la fila i.
- El producto de estos factores es comúnmente denominado producto de Markowitz.

Locales

Grado mínimo

- Rose presentó la reordenación utilizando herramientas de grafos, mostrando que la selección realizada por el algoritmo S2 es equivalente a elegir el nodo con menor cantidad de aristas incidentes (menor grado) del grafo asociado.
- Por esta razón al algoritmo S2 se denomina como algoritmo de grado mínimo (Minimum Degree-MD).

Locales

```
while G != {} do
   seleccionar el nodo v con menor grado
     del grafo G y numerarlo.
   G = Gv.
end while
```

El grafo Gv se obtiene borrando el nodo v y todas sus aristas incidentes del grafo G y agregando las aristas necesarias para crear un clique con los nodos adyacentes a v en G.

En cada paso del método puede haber varios nodos con mínimo grado y la elección afecta los resultados.

La disyuntiva es conocida como problema de tie-breaking.

Locales

Aplicación de grafos cocientes

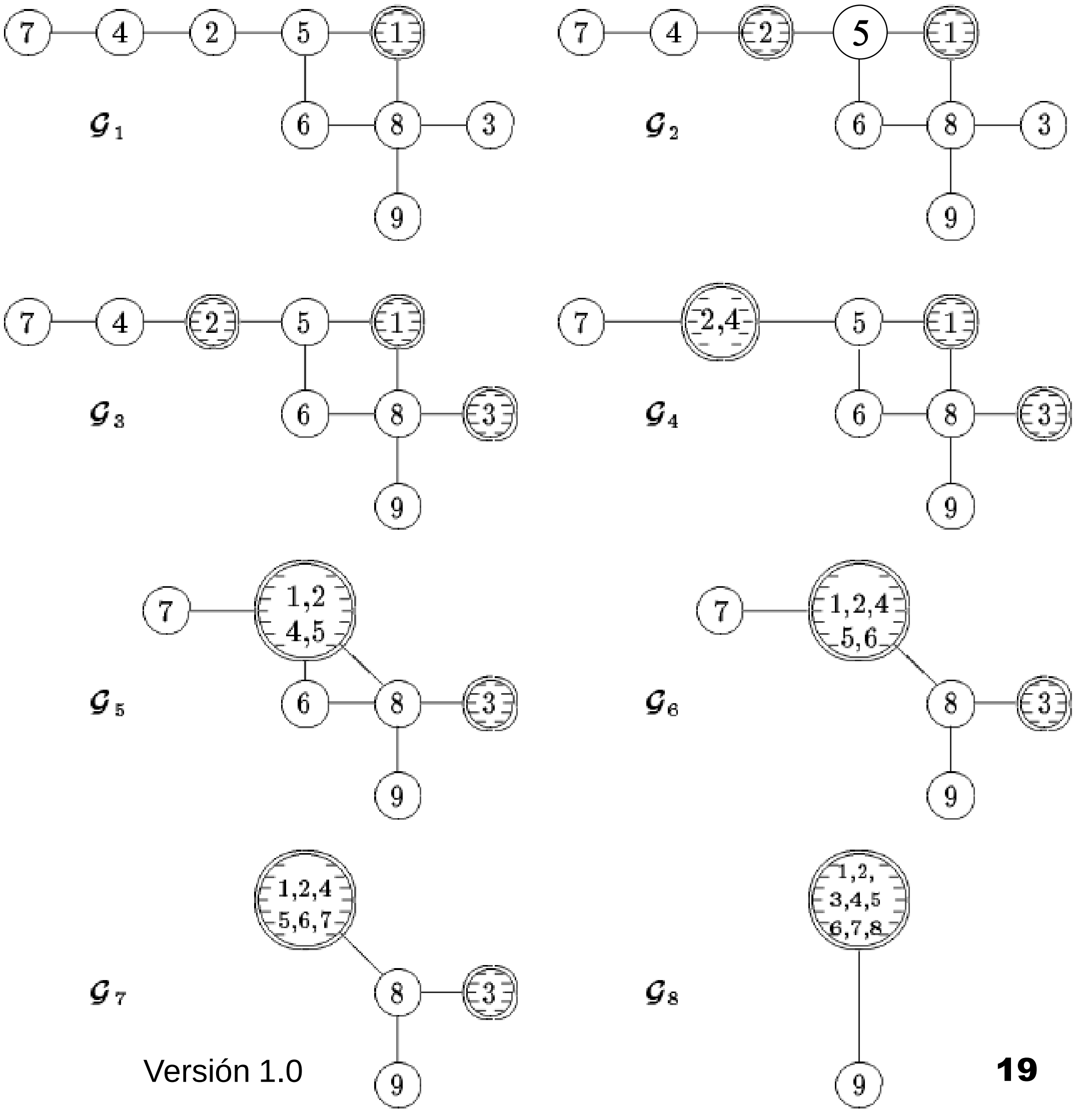
- La actualización del grafo de adyacencias posee dos grandes inconvenientes:
  - El importante costo computacional que implica.
  - No permite predecir la memoria a utilizar, ya que en cada actualización se pueden agregar varias aristas al grafo. Además, en cada paso es necesario actualizar el grado de los nodos que aún no se han procesado.
- Para solucionar el problema de la predicción de la memoria a utilizar, se propuso trabajar con cliques, mediante la técnica denominada **Grafos Cociente** (Quotient Graph Model).

Locales

- Definición (informal):
  - Dado un grafo G(X,E) y una partición de los vértices P={X_1,…, X_t} tal que $\bigcup_{k=1}^{t} Xk = X$ y $X_i \cap X_j = \emptyset, \forall i \neq j$, el grafo cociente G/P=G(P,H) donde la arista {Xi,Xj} está en G/P si existe alguna arista {u,v} en G tal que u está en Xi y v está en Xj.

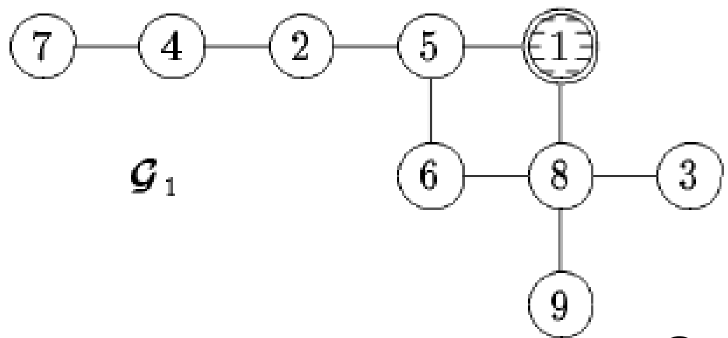
Secuencia de grafos cocientes:

- La figura muestra una secuencia (cualquiera) de grafos cociente.
- Los nodos rayados son los eliminados hasta el momento.
- Cuando el nodo a eliminar es adyacente a nodos ya eliminados se genera un "supernodo"
- La cantidad de nodos / aristas de los grafos cociente en la secuencia nunca es mayor que la del grafo original.

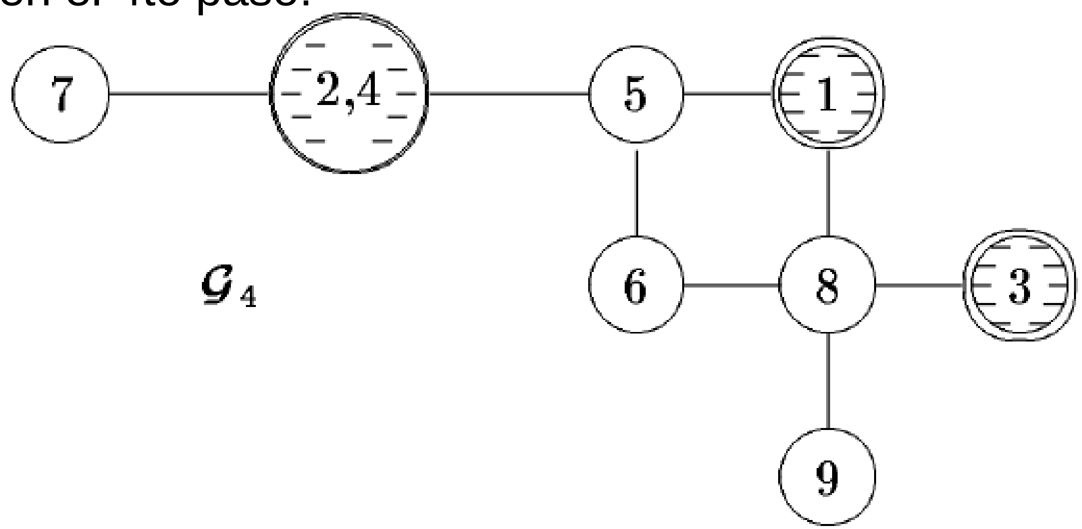


Relación entre grafos cocientes y grafos de eliminación:

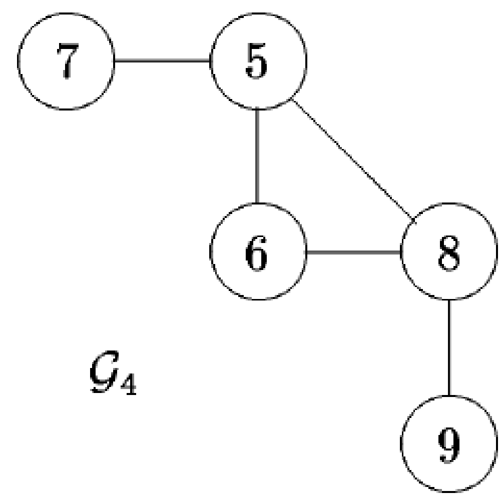
Grafo original:



Grafo cociente en el 4to paso:



Grafo de eliminación en el 4to paso:



Locales

Otra forma de ver la eliminación por grafos cociente:

- Cada arista del grafo G se representa como un clique de tamaño dos.
- Para eliminar un pivote únicamente es necesario borrar los cliques que contengan al nodo eliminado y crear un nuevo clique con todos los vértices adyacentes.
- Esta tarea únicamente implica la unión de listas.

Locales

Aplicación a MD

- El G está formado por los cliques {K1,…,Kn}.
- {Kv1,…,Kvs} son los cliques que contienen al nodo v.

```
while G != {} do
   v = nodo de menor grado de G.
   Crear el nuevo clique Kv = ⋃_{i=1}^{s} Kvi
   Remover de G los cliques Kv1 ,Kv2 , ....,Kvs .
   Agregar a G el clique Kv.
end while
```

Locales

Otras Mejoras, eliminación de masa:

- George y McIntyre presentaron el concepto de eliminación de masa (Mass Elimination).
- En ocasiones el nodo v de grado mínimo pertenece a un clique, lo que implica que el conjunto de nodos en el clique se puede eliminar inmediatamente después de v en cualquier orden.

Locales

Otras Mejoras, nodos indistinguibles

- George y Liu definen los nodos indistinguibles.
- Demostrando que si dos nodos son indistinguibles en el grafo G entonces serán indistinguibles en Gv.
- Los nodos indistinguibles pueden ser tratados como un solo nodo en la estructura, lo que llaman super-nodos (también denominados por otros autores supervariables o nodos prototipos).
- La utilización de super-nodos posee como ventaja que se utiliza una cantidad menor de cliques para representar los árboles y entonces son necesarias menos operaciones de actualización del grafo de eliminación.

Locales

Otras Mejoras, actualización incompleta

- Eisenstat, Gursky, Schultz y Sherman presentaron el concepto de actualización incompleta de grado.
- Se basa en que no es necesario actualizar el grado de todos vértices en cada paso de la eliminación.
- Por esto se utiliza el concepto de dominado (outmatched). Un nodo v es dominado por u, si $Adj_G(u) \cup \{u\} \subset Adj_G(v) \cup \{v\}$
- Una consecuencia directa de la definición es que el nodo u siempre tiene menor grado que el nodo v. Si el nodo v se transforma en dominado por u en alguna etapa de la eliminación no es necesario actualizar el grado de v hasta que el nodo u sea eliminado.

Locales

Otras Mejoras, absorción de elementos

- Otra inovación en el proceso de ordenamiento se debe a Duff y Reid que introdujeron la idea de absorción de elementos (element absorption).
- La propuesta se basa en quitar del grafo de eliminación la información redundante, esto significa que si existe un clique Ks que está incluido en otro clique Kt entonces el clique Ks se puede eliminar del grafo G sin perdida de información.

Locales

Otras Mejoras, eliminación múltiple

- Liu propuso el concepto de eliminación múltiple en el algoritmo de grado mínimo (Multiple Minimum Degree - MMD).
- Si dos nodos poseen el mismo grado y no son adyacentes se pueden eliminar en forma paralela
  - .. o por lo menos suspender la actualización del grado de los nodos en AdjG(v) y seleccionar para eliminar un nodo con el mismo grado que v en el subgrafo G − (v U AdjG(v)).
- El procedimiento se repite hasta que no queden nodos con el mismo grado.

Locales

Otras Mejoras, grado externo

- Otro aporte realizado por Liu es la técnica grado externo.
- Trabajar, en vez de con el grado verdadero de un nodo, con el grado externo, definido como la cantidad de aristas que posee el vértice que van a nodos de fuera del clique al cual pertenece. La estrategia apunta a mejorar la calidad de los resultados en cuanto a fill-in.

Locales

Otras Mejoras, acotar el grado

- Gilbert, Moler y Schreiber propusieron el uso de una cota superior del grado el grado externo.
- **Amestoy, Davis y Duff** en el año 1996 usaron una aproximación más sofisticada que llamaron algoritmo de grado mínimo aproximado **(Approximated MD - AMD)** que demuestran logra ordenes de calidad similar a los obtenidos con MD y posee mejor desempeño computacional.

Híbridas

- Las estrategias híbridas consisten en dividir en una primera etapa los grafos con estrategias globales…
- ...una vez que cada partición posee pocos vértices (algunos cientos), se ordenan mediante estrategias locales.

Otras

- Otras estrategias utilizadas
  - Simulated annealing
  - Algoritmos genéticos