Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Cálculo III

Primer parcial - 4 de Mayo de 2018. Duración: 3 horas

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula	Firma

Observación: $\int_\alpha F \cdot ds$ es una notación para representar la circulación del campo F sobre la curva α.

Ejercicio 1

a. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una curva con $\|\gamma'(t)\| \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$. Prueba que la curvatura en un punto de la curva se puede calcular como $\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$.

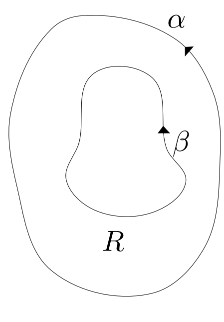
b. Considera la curva γ que se obtiene de la intersección de $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$ con $\pi = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$. Parametrízala y verifica que la parametrización encontrada recorre toda la curva γ.

c. Encuentra la curvatura κ y la torsión τ en todo punto de γ.

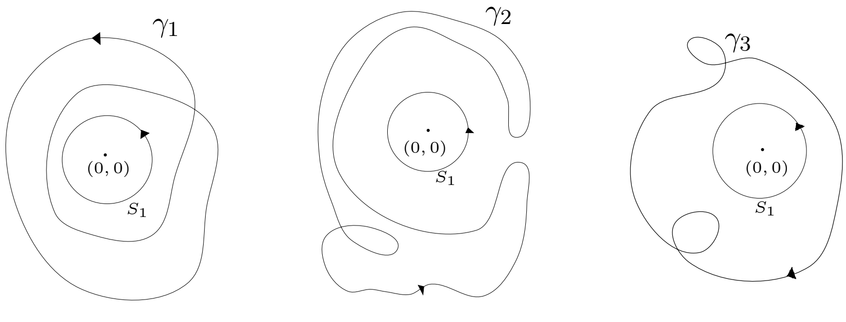
Ejercicio 2

a. Considera un campo $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de clase C^1 e irrotacional donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Sea R la región comprendida entre dos curvas cerradas simples α y β como muestra la figura y tal que $R \subset U$. Prueba que $\int_\alpha F \cdot ds = \int_\beta F \cdot ds$ si α y β tienen la misma orientación.

(**Atención:** asume como válido el teorema de Green, recordando que éste se demuestra en la región acotada determinada por **una** curva cerrada simple del plano).



b. Considera un campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1, irrotacional y que cumple que $\int_{S_1} F \cdot ds = 2$, donde S_1 es la curva cerrada simple que se indica en las figuras. Halla la circulación del campo sobre las curvas cerradas γ_i, con $i \in \{1, 2, 3\}$ indicadas en las figuras. Justifica debidamente tus respuestas.



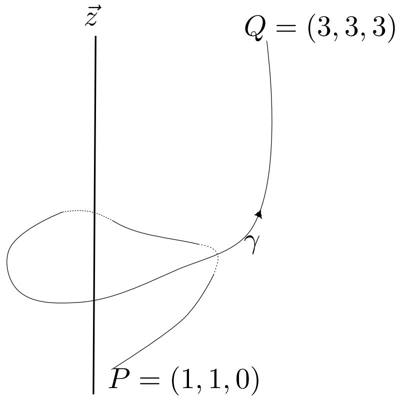
Ejercicio 3
Considera el campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right)$, siendo U el mayor dominio posible para F.

a. Determina U y estudia si es simplemente conexo..

b. ¿Es F irrotacional? Justifica la respuesta.

c. ¿Es F de gradientes? Justifica la respuesta y en caso afirmativo encuentra **todos** los potenciales escalares.

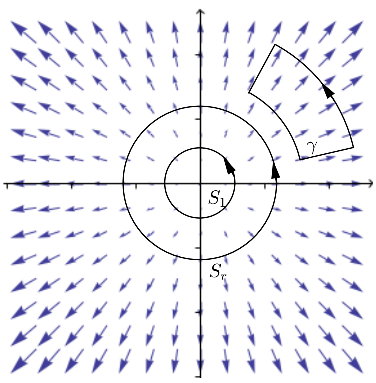
d. Calcula $\int_\gamma F \cdot ds$ donde γ es la curva indicada en la figura.



Ejercicio 4
Considera un campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que:

- la norma de F restricta a S_r es una constante no nula que depende r, donde S_r es la circunferencia de centro en el origen y radio r recorrida en sentido antihorario,
- F en cada punto de S_r es ortogonal con el versor tangente a la curva.

En la figura siguiente se muestra un campo en esas condiciones.



a. Calcula $\int_{S_1} F \cdot ds$, $\int_{S_r} F \cdot ds$ y $\int_\gamma F \cdot ds$ donde γ es la curva cerrada simple que está conformada por dos arcos de circunferencias centradas en el origen y dos segmentos incluidos en semirrectas que pasan por el origen, orientada como se indica en la figura. Justifica debidamente tu respuesta.

b. Demuestra que el campo F es irrotacional para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (Advertencia: esta parte puede (o no) resultar complicada).