RUIDO PASABANDA (v2010)

Objetivos

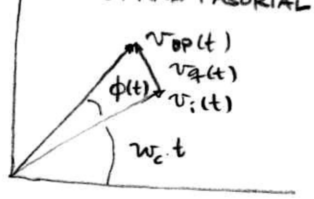
1. Analizar el desempeño de los sistemas de comunicación analógicos pasabanda en presencia de ruido.
2. Modelo del ruido pasabanda.
3. Cálculo de las SNR_D para
   i. AM, DSB, VSB, síncrono y envolvente.
   ii. PM y FM

Motivación

La transmisión de una señal (un mensaje) analógico $x(t)$ (S_x, W), $|x| \leq 1$, por un canal pasabanda puede hacerse con varios métodos diferentes, modulando distintas partes de una señal portadora

$$v_{BP}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Modulación} \\ \text{lineal}}}{A_v(t)} \cos\big(w_c t + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Modulación} \\ \text{exponencial}}}{\phi_v(t)}\big)$$

DIAGRAMA FASORIAL



$$v_{BP}(t) = v_i(t)\cos(w_c t) + v_q(t)\cos\left(w_c t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= v_i(t)\cos(w_c t) - v_q(t)\sin(w_c t)$$

Señales pasabajos

$v_i(t) = A_v(t)\cos(\phi_v(t))$ y $v_q(t) = A_v(t)\sin(\phi_v(t))$ FASE / CUADRATURA

Asimismo $A_v(t) = \sqrt{v_i^2(t) + v_q^2(t)}$ $\phi_v(t) = \arctan\left(\frac{v_q(t)}{v_i(t)}\right)$

El ancho de banda utilizado y la potencia de transmisión B_T y S_T dependen del método de modulación

	B_T	S_T		SNR_D
AM	$2W$	$\frac{1}{2}A^2(1+\mu S_x)$		
DSB	$2W$	$\frac{1}{2}A_c^2 S_x$		γ
SSB	W	$\frac{1}{4}A_c^2 S_x$		
VSB	$W+\beta$	$\frac{1}{4}A_c^2 S_x <$	$< \frac{1}{2}A_c^2 S_x$	
PM		$\frac{1}{2}A_c^2$		$\Big\}$ 2W en caso Narrow Band
FM	$2(D+2)W$	$\frac{1}{2}A_c^2$	$D = \frac{f_\Delta}{W}$	

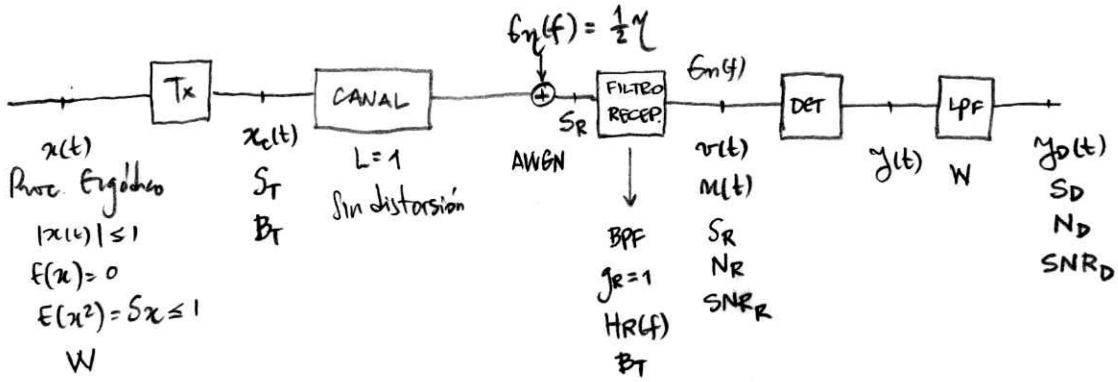
Preguntas: Cómo afecta el ruido?

Cómo se comportan c/u de las modulaciones?

Hay compromisos? (Siempre se puede demodular?)

Cuál es la eficiencia en cuánto a la potencia de transmisión en presencia del ruido?

Modelo de un sistema de comunicación pasabanda



Ruido en recepción: proceso estocástico estacionario y gaussiano (ergódico) pasabanda.

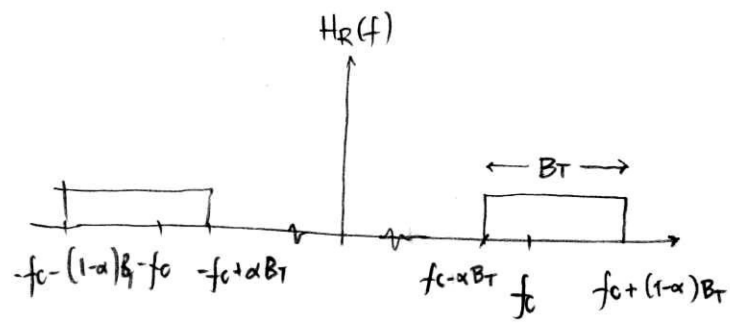
Dependiendo la modulación $y(t)$ será

$$y(t) = \begin{cases} v_i(t) & \text{DET. SÍNCRONO} \\ A_v(t) - \overline{A_v} & \text{DET. ENVOLVENTE} \\ \phi_v(t) & \text{DET. FASE} \\ \frac{1}{2\pi}\dot{\phi}(t) & \text{DET. FREQ. INSTANTÁNEA} \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{x_c(t)}{\sqrt{L}} + n(t) \qquad G_n(f) = |H_R(f)|^2 G_\eta(f) = \frac{1}{2}\eta\,|H_R(f)|^2$$

$$E(v^2) = \frac{E(x_c^2)}{L} + E(n^2) = S_R + N_R$$

INDEP.
Y MEDIA NULA



El α nos permitirá evaluar el sist. con diferentes modulaciones

$\alpha = \frac{1}{2}$ DSB

$\alpha = \{0, 1\}$ U/L SSB

B_T ancho de banda del filtro ideal o ancho de banda equivalente del ruido del filtro real

$$N_R = \sigma_N^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 \tfrac{1}{2}\eta\, df \underset{\underset{\text{BPF}}{\uparrow}}{=} \eta B_T$$

$$SNR_R = \frac{S_R}{\eta B_T} = \frac{W}{B_T}\frac{S_R}{\eta W} = \frac{W}{B_T}\gamma$$

γ: SNR_D en banda base
independiente del método de modulación

Para saber lo que "ve" el detector en la entrada, y por ende, lo que se detectará, necesitamos conocer del ruido:

- componente en fase con la portadora (det. síncrono)
- envolvente y fase (det. de envolvente, de fase y de frec instantánea).

Ruido Pasabanda: $n(t) = n_i(t)\cos(w_c t) - n_q(t)\sin(w_c t)$

$$n_i(t) = A_n(t)\cos(\phi_n(t))$$
$$n_q(t) = A_n(t)\sin\phi_n(t)$$

Propiedades de $n_i(t)$ y $n_q(t)$ (Ejercicio. pp

n_i y n_q son estacionarios y gaussianos (ergo, ergódicos)

$E(n_i) = E(n_q) = 0$

$E(n_i, n_q) = 0$ No están correlacionados si $H_R(f)$ tiene simetría local respecto a f_c.
(ergo, independientes por Gaussianos)

$E(n_i^2) = E(n_q^2) = E(n^2) = N_R = \eta B_T$

$n_i(t)$ y $n_q(t)$ son procesos pasabajos, es posible escribirlos en función de $n(t)$ y $\hat{n}(t)$

($\hat{n}(t)$: Transformada de Hilbert $\hat{n}(t) = n(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int \frac{n(s)}{t-s}ds$

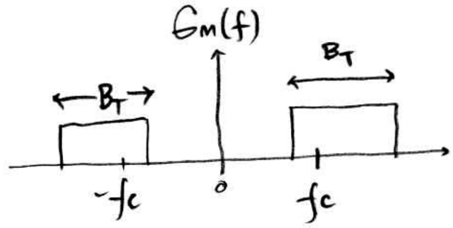
$$n_i(t) = n(t)\cos(w_c t) + \hat{n}(t)\sin(w_c t)$$
$$n_q(t) = \hat{n}(t)\cos(w_c t) - n(t)\sin(w_c t)$$

$$\mathcal{F}(\hat{n}) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,\mathcal{F}(n)$$

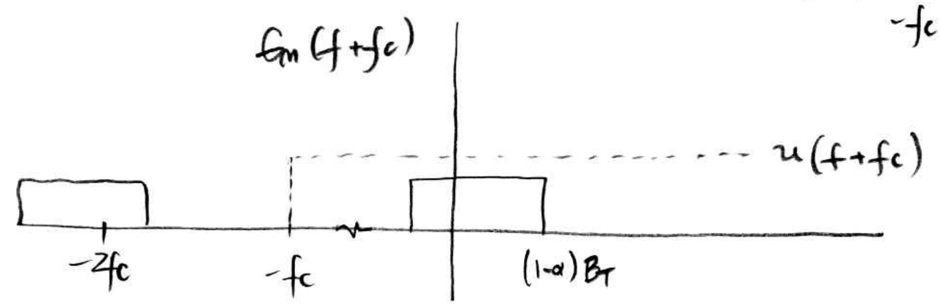
$$R_{\hat{n}}(\tau) = R_n(\tau)$$
$$R_{\hat{n}n}(\tau) = \hat{R}_n(\tau) = -R_{n\hat{n}}(\tau)$$
$$G_n(f) = G_{\hat{n}}(f)$$

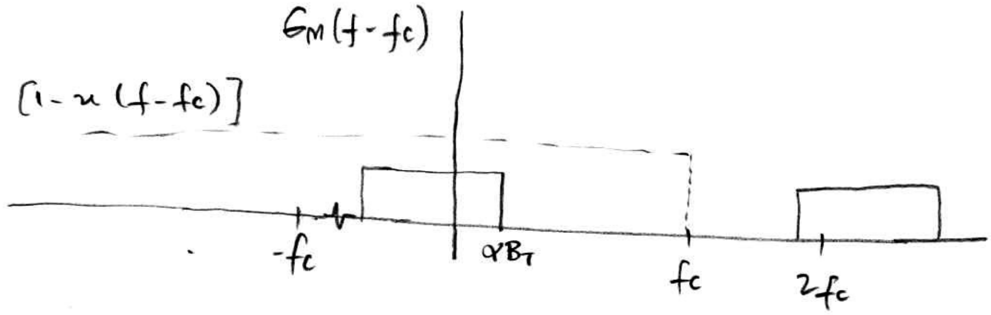
Tomando $R_{m_i}(\tau)$ se llega a

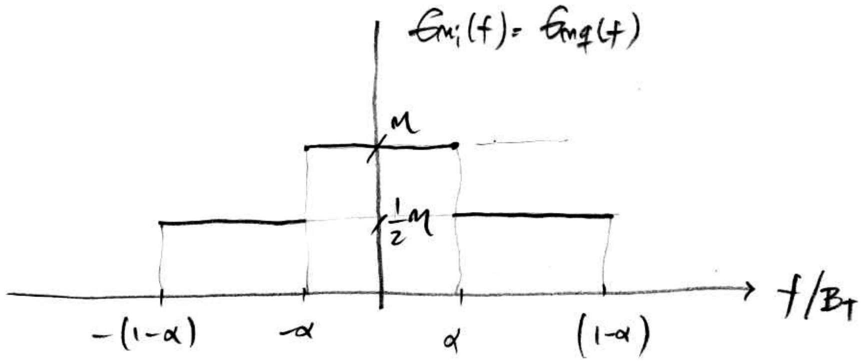
$$G_{m_i}(f) = G_{m_q}(f) = \underbrace{G_M(f+f_c)\,u(f+f_c)}_{\text{"Parte positiva" centrada en } 0} + G_M(f-f_c)\left[1-u(f-f_c)\right]$$



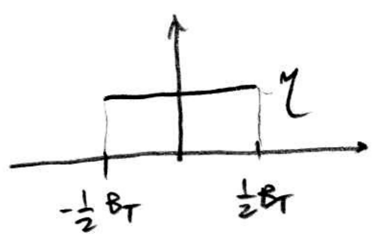
¿Cómo son estos espectros? Siendo



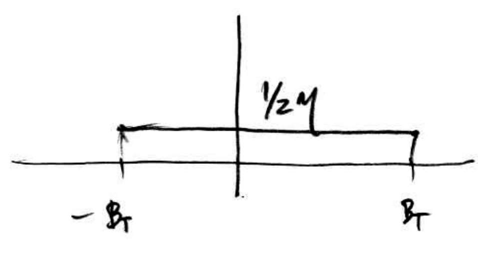




(1) Bandas simétricas (AM, DSB, FM, PM)



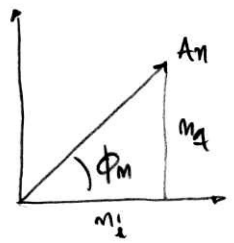
(2) Única banda ({U|L} SSB)



Esto nos permite analizar los sistemas que usan componentes fase y cuadratura del ruido.
Por ej.: detección sincrónica. Pero para expresiones envolvente/fase no es necesaria
(en particular mod. exponencial)

Representación envolvente - fase

Toda señal compleja puede representarse en fase-cuadratura o envolvente-fase



$$n(t) = \underbrace{A_n(t)}_{\text{envolvente}} \cos\left(w_c t + \underbrace{\phi_n(t)}_{\text{fase}}\right)$$

$$A_n^2(t) = n_i^2(t) + n_q^2(t) \quad \text{y} \quad \phi_n(t) = \arctan \frac{n_q(t)}{n_i(t)} \qquad (1)$$

$$n_i(t) = A_n(t) \cos\left(\phi_n(t)\right) \quad \text{y} \quad n_q(t) = A_n(t) \operatorname{sen}\left(\phi_n(t)\right)$$

$$\rightarrow \quad n(t) = A_n(t) \cos\left(\phi_n(t)\right) \cos\left(w_c t\right) - A_n(t) \operatorname{sen}\left(\phi_n(t)\right) \sin\left(w_c t\right)$$

Las relaciones no lineales hacen muy difícil el análisis espectral, aunque se conozca G_{n_i} y G_{n_q}. Esta conversión es similar a un cambio de coordenadas rectangulares a polares, este cambio lleva a la siguiente relación entre distribuciones de prob.

$$f_{n_i,n_q}(n_i, n_q)\, dn_i\, dn_q = f_{A_n,\phi_n}(A_n, \phi_n)\, dA_n\, d\phi_n \qquad \left[\text{describen una misma área}\right]$$

$$\text{y} \quad dn_i\, dn_q = A_n\, dA_n\, d\phi_n$$

$$\rightarrow \quad f_{A_n,\phi_n}(A_n, \phi_n) = A_n f_{n_i,n_q}(n_i, n_q) \qquad \text{con} \quad f_{n_i,n_q} \sim N\left(0, \sigma_N^2\right)$$

$$= A_n \frac{1}{2\pi\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{n_i^2 + n_q^2}{2\sigma_N^2}\right) = \frac{A_n}{2\pi\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{A_n^2}{2\sigma_N^2}\right)$$

Para calcular f_{A_n} y f_{ϕ_n} calcularemos las marginales de f_{A_n,ϕ_n}:

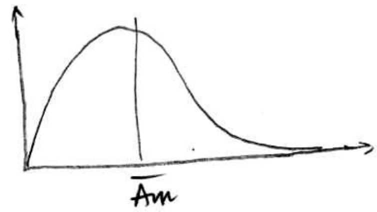
$$f_{\phi_n}(\phi_n) = \int_0^{+\infty} f_{A_n,\phi_n}(A_n, \phi_n)\, dA_n = \frac{1}{2\pi\sigma_N^2} \int_0^{+\infty} A_n e^{-\frac{A_n^2}{2\sigma_N^2}}\, dA_n = \frac{1}{2\pi}\left[-e^{-A_n^2/2\sigma_N^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\rightarrow \quad \phi_N \sim \mathcal{U}\left[0, 2\pi\right)$$

$$f_{A_m\phi_m}(A_m,\phi_m) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{f_{\phi_m}(\phi_m)} \frac{A_m}{\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{A_m^2}{2\sigma_N^2}\right)$$

Esto muestra que $f_{A_m\phi_m} = f_{A_m} f_{\phi_m}$

$$\rightarrow \quad f_{A_m}(A_m) = \frac{A_m}{\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{A_m^2}{2\sigma_N^2}\right) \qquad A_m \geq 0$$



Que es una distribución de Rayleigh

$$E(A_m) = \sqrt{\frac{\pi \sigma_N^2}{2}} = \sqrt{\frac{\pi N_R}{2}}$$

$$E(A_m^2) = 2\sigma_N^2 = 2N_R$$

Verificación: $E(m^2) = \sigma_N^2 = N_R = E\left(A_n^2 \cos^2(\omega_c t + \phi_m(t))\right) =$

$$= E(A_n^2)\langle \cos^2(\omega_c t + \phi_m(t))\rangle = 2N_R \frac{1}{2} \quad ✓$$

Relación Señal a Ruido en Recepción

La recepción es similar para todos los sistemas pasabanda. La diferencia está en el detector que se utiliza; y obviamente en las diferencias de B_T y S_T.

$$SNR_R = \frac{W}{B_T}\gamma$$

Los sistemas con mayores requerimientos de ancho de banda B_T están más expuestos al ruido en recepción. Esto no implica peores SNR_D, pero precisan mayor S_T

Ruido en Modulación Lineal

1. Detección síncrona (AM, DSB, SSB)

$$v(t) = x_c(t) + m(t) \longrightarrow \otimes \longrightarrow \boxed{DC} \longrightarrow \underset{W}{\boxed{LPF}} \longrightarrow y_D$$

$$\uparrow\ 2\cos(w_c t + \phi)$$

DSB

$$v(t) = \left[A_c x(t) + m_i(t)\right]\cos(w_c t) - m_q(t)\sin(w_c t)$$

$$y(t) = A_c x(t) + m_i(t)$$

$$\Downarrow$$

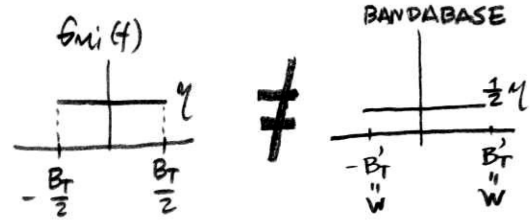
$$y_D(t) = A_c x(t) + m_i(t)$$

La detección síncrona ideal extrae la componente en fase del mensaje $v(t)$

$$SNR_D = \frac{S_D}{N_D} \qquad S_D = A_c^2 S_x \quad y \quad N_D = ?$$

$$N_D = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{mi}(f)\,df = \int_{-B_T/2}^{B_T/2} \eta\, df = \eta B_T$$

Pues



Da igual que lo que calculabamos en bandabase. Pero partiendo de otros G_m y B_T

No confundir!

$$\Rightarrow SNR_D = \frac{A_c^2 S_x}{\eta B_T}$$

En este caso $\quad S_R = \frac{1}{2} A_c^2 S_x$

$$SNR_D = \frac{2 S_R}{\eta B_T} = \frac{S_R}{\eta W} = \gamma$$

$\Rightarrow$ IGUAL SNR_D QUE EN BANDABASE, CON LA COMPLEJIDAD EXTRA DEL SINCRONISMO

¿QUÉ GANAMOS? MODULAR

Resumen DSB $\quad B_T = 2W \quad SNR_D = \gamma \quad$ (A la tabla!)

AM = DSB + C CON DETECTOR SÍNCRONO

$$v(t) = x_c(t) + m(t) = \left[A_c(1 + \mu x(t)) + m_i(t)\right]\cos(w_c t) - m_q(t)\sin(w_c t)$$

$$y_D(t) = A_c \mu x(t) + m_i(t)$$

$$S_D = A_c^2 \mu^2 S_x \qquad N_D = \eta B_T \qquad B_T = 2W$$

$$S_R = \frac{1}{2} A_c^2 (1 + \mu^2 S_x)$$

$$SNR_D = \frac{A_c^2 \mu^2 S_x}{\eta B_T} = \frac{\mu^2 S_x}{(1 + \mu^2 S_x)}\gamma$$

Si $\mu = 1$ y $S_x = 1$ $\rightarrow$ $SNR_{D_{max}} = \frac{1}{2}\gamma$

En AM comercial $S_x \simeq 0{,}1$ y SNR_D es 10 dB menor que γ. Para contrarestar esto las radioemisoras utilizan técnicas de "compresión de volumen" y "limitación del valor de pico" para modular 100% a la portadora.

Resumen AM : $B_T = 2W$ $\quad SNR_D \leq \gamma/2$

SSB

$$v(t) = x_c(t) + n(t) = \left[\tfrac{1}{2}A_c x(t) + n_i(t)\right]\cos(w_c t) \pm \left[\tfrac{1}{2}A_c \hat{x}(t) + n_q(t)\right]\sin(w_c t)$$

$$y_o(t) = \frac{1}{2}A_c x(t) + n_i(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} S_D = \frac{1}{4}A_c^2 S_x \qquad N_D = \eta B_T = \eta W \\ S_R = \frac{1}{4}A_c^2 S_x \end{array}\right\} \quad SNR_D = \frac{S_R}{\eta W} = \gamma$$

VSB+C

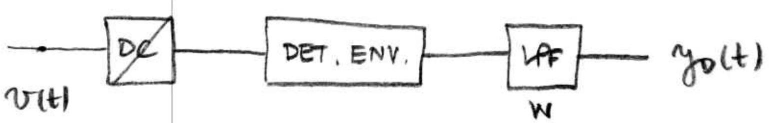
$\beta \ll W \Rightarrow$ El ruido es similar al de SSB.
Aunque la señal es como la de AM

$SNR_D \approx \frac{\mu^2 S_x}{1+S_x\mu^2}\gamma$ VSB+C

$B_T \approx W$

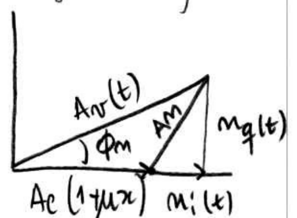
AM CON DETECTOR DE ENVOLVENTE

Debemos usar la descomposición env.-fase del ruido



$$v(t) = \left[A_c(1+\mu x(t)) + n_i(t)\right]\cos(w_c t) - n_q(t)\sin(w_c t)$$

Diagrama fasorial



$$A_v^2(t) = \left[A_c(1+\mu x(t)) + n_i(t)\right]^2 + n_q^2(t)$$

$$\phi_v(t) = \arctan\left(\frac{n_q(t)}{A_c(1+\mu x(t)) + n_i(t)}\right)$$

$$y_D(t) = A_v(t) - \overline{A_v}$$

Para poder analizar este detector debemos hacer alguna hipótesis extra, estudiando los casos extremos
(i) $A_c \gg A_N$
(ii) $A_c \ll A_N$

(i) $A_c \gg A_n$ Señal domina el ruido

Para aproximar este escenario ponemos como criterio $P_r\left(\frac{A_n}{\sigma_N} \leq \frac{A_c}{\sigma_N}\right) \geq 0{,}99$

Sabiendo que $f_{A_n}(A_n) \sim \text{Rayleigh}(\sigma_N^2)$

$$P_r(A_n \leq A_c) \geq 0{,}99 \iff P_r\left(\frac{A_n}{\sigma_N} \leq \frac{A_c}{\sigma_N}\right) \geq 0{,}99$$

[Definiendo $x = \frac{A_n}{\sigma_N}$ V.A. $\sim$ Rayleigh (1)]

$$\iff \int_0^{A_c/\sigma_N} x e^{-x^2/2} dx \geq 0{,}99$$

$$\iff -e^{-x^2/2}\Big|_0^{A_c/\sigma_N} \geq 0{,}99$$

$$\iff 1 - e^{-A_c^2/2\sigma_N^2} \geq 0{,}99$$

$$\iff e^{A_c^2/2\sigma_N^2} \geq 100$$

$$\iff A_c^2/2\sigma_N^2 \geq \ln 100 = 2\ln 10$$

$$\iff \left(\frac{A_c}{\sigma_N}\right)^2 \geq 4\ln 10 = 9{,}21 \sim 10$$

$$SNR_R = \frac{S_R}{\eta B_T} = \frac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2 S_x)\frac{1}{\sigma_N^2} \underset{\mu^2 S_x = 1}{=} \frac{A_c^2}{\sigma_N^2}$$

$\Rightarrow$ Condición de umbral en AM con detector de envolvente $SNR_R \geq SNR_R^{TH} \simeq 10$

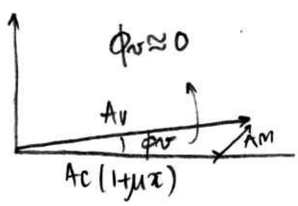
En esta condición:

$$A_v(t) = \sqrt{\left(A_c(1+\mu x(t)) + m_i(t)\right)^2 + m_q^2(t)}$$

$$A_v(t) = A_c(1+\mu x(t))\sqrt{\left(1 + \frac{m_i}{A_c(1+\mu x(t))}\right)^2 + \frac{m_q^2}{A_c^2(1+\mu x(t))^2}} \simeq A_c(1+\mu x)\sqrt{1 + 2\frac{m_i}{A_c(1+\mu x)}}$$

$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2}\ (x \to 0)$

$$\simeq A_c(1+\mu x) + m_i$$



$$\rightarrow A_c(1+\mu x(t)) + m_i(t) \approx A_v(t)$$

$$y_D(t) = A_v(t) - \overline{A_v} = \mu A_c x(t) + m_i(t)$$ IGUAL QUE EL DET. SINCRÓNICO

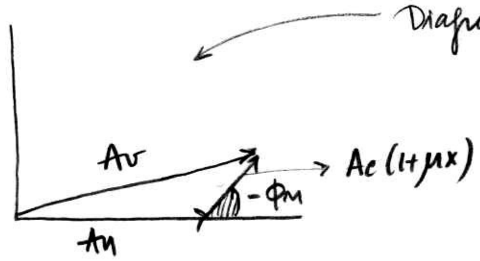
$$SNR_D = \frac{A_c^2\mu^2 S_x}{\eta B_T} = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x}\gamma \simeq SNR_D$$ sii $\underline{\underline{SNR_R \geq SNR_R^{th} = 10}}$

$S_R = \frac{1}{2}A_c^2(1+\mu^2 S_x)$

Obs: En condiciones de funcionamiento el det. de envolvente y el sincrónico tienen el mismo desempeño.

(ii) $A_c \ll A_n \Rightarrow SNR_R < SNR_R^{th}$

Diagrama fasorial referido al ruido



$$A_v(t) \cong A_n(t) + A_c(1+\mu x(t)) \cos \phi_n(t)$$

En estas condiciones de ruido dominante el ruido mutila a la señal. No existe ningún término que sea sólo mensaje.

No es posible detectar mensaje.

Obs: en AM comercial la calidad de $SNR_D \geq 30dB$

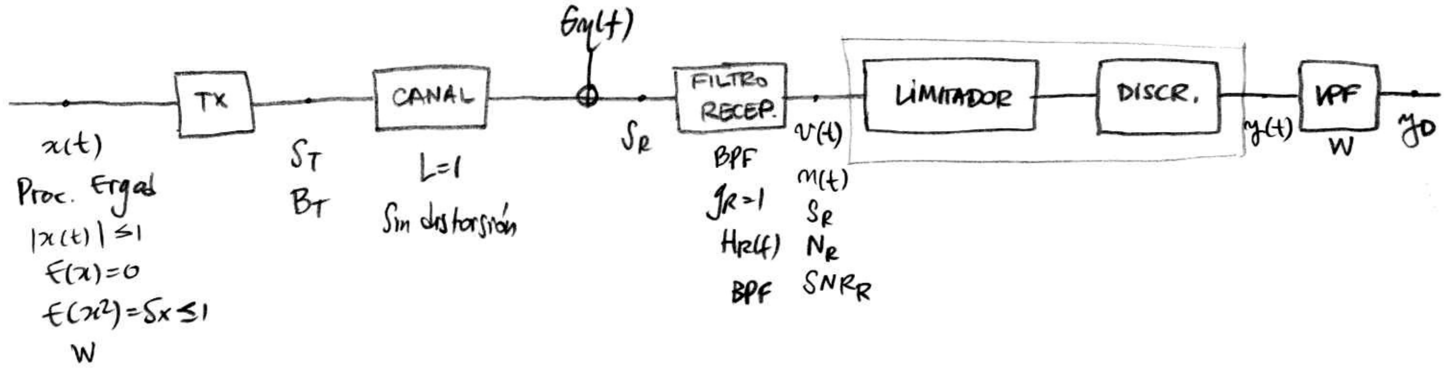
$$SNR_D = \frac{\mu^2 S_x}{1+\mu^2 S_x} \gamma \leq \frac{1}{2} \gamma = SNR_R \longrightarrow SNR_R \geq 30dB > SNR_R^{th}$$

Jacobiano del cambio de coordenadas rectangular a polar

$$CV. \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R \sin\theta \end{cases} \qquad p_{R\theta}(R,\theta) = p_{x,y}(x,y)\, J\left(\frac{x,y}{R,\theta}\right)$$

$$J(x,y \to R,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix} = R(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R.$$

Ruido en Modulación Exponencial

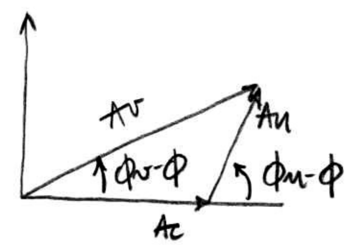


$$v(t) = \frac{x_c(t)}{\sqrt{L}} + m(t) = A_c \cos\left(w_c t + \phi(t)\right) + A_m \cos\left(w_c t + \phi_m(t)\right) = A_v(t) \cos\left(w_c t + \phi_v(t)\right)$$

$$y(t) = \begin{cases} \phi_v(t) & \text{PM} \\ \frac{1}{2\pi}\dot{\phi}(t) & \text{FM} \end{cases} \qquad \phi(t) = \begin{cases} \phi_\Delta\, x(t) & \text{PM} \\ 2\pi f_\Delta \int^t x(s)\,ds \end{cases}$$

$$S_R = \frac{1}{2} A_c^2 \qquad N_R = \eta B_T \qquad SNR_R = \frac{A_c^2}{2\eta B_T}$$

Diagrama fasorial referido al mensaje



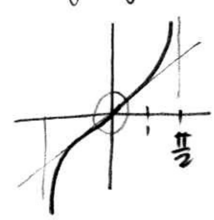
$$\operatorname{tg}(\phi_v - \phi) = \frac{A_n \sin(\phi_m - \phi)}{A_c + A_n \cos(\phi_m - \phi)}$$

$$\Rightarrow \phi_v(t) = \underbrace{\phi(t)}_{\text{SEÑAL}} + \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{A_n \sin(\phi_m - \phi)}{A_c + A_n \cos(\phi_m - \phi)}\right)}_{\text{RUIDO } \psi(t)}$$

Nuevamente necesitamos alguna hipótesis extra para simplificar y seguir adelante

(H) $A_c \gg A_n \Rightarrow SNR_R \geq SNR_R^{th} \simeq 10$ o sea $\psi(t) \simeq \operatorname{arctg}\left(\frac{A_n \sin(\phi_m - \phi)}{A_c}\right)$

Luego $\psi(t) \simeq \frac{A_m}{A_c} \sin(\phi_m - \phi)$ pues $\left|\frac{A_n \sin()}{A_c}\right| \leq \frac{A_m}{A_c} \ll 1$ y $\operatorname{tg}(x) \sim x$



¿Cuál es la densidad de ruido de $(\phi_n - \phi)$?

ϕ y ϕ_n son indep.
$\phi \sim \mathcal{U}(-\pi, \pi)$
ϕ, ϕ_n periódicos 2π

$$f_{\phi-\phi_n}(x) = f_\phi * f_{\phi_n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\phi(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f_\phi(u)\,du \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2\pi} = f_{\phi_n}(x)$$

ϕ 2π periódica

$f_{\phi-\phi_n} = f_{\phi_n-\phi} = f_{\phi_n} \Rightarrow \sin(\phi_n - \phi) \sim \sin \phi_n$

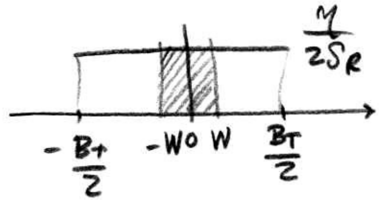
OTRO ARGUMENTO
- ϕ_n es uniforme $(-\pi, \pi)$ ✓
- ϕ_n varía mucho más rápido que $\phi(t)$ QUE DEPENDE DE $x(t)$

$$\Rightarrow \psi(t) \cong \frac{A_n \sin(\phi_n(t))}{A_c} = \frac{n_q(t)}{A_c}$$

$$\rightarrow \phi_v(t) = \phi(t) + \frac{1}{\sqrt{2S_R}} n_q(t)$$

Luego de estas simplificaciones el ruido en la fase es aditivo, depende de la componente en cuadratura del ruido, y decrece al aumentar la potencia de la señal transmitida.

$$G_\psi(f) = \frac{1}{2S_R} G_{n_q}(f) = \frac{1}{2S_R}\eta\, \Pi\left(\frac{f}{B_T}\right)$$



Ruido en PM

$$y_D(t) = \phi_v(t) = \phi_\Delta x(t) + \psi(t)$$

$$S_D = \phi_\Delta^2 S_x \qquad N_D = \int_{-W}^{W} G_\psi(f)\,df = \frac{\eta}{2S_R} 2W = \frac{\eta W}{S_R}$$

SOBRE EL UMBRAL

$$\rightarrow SNR_D = \phi_\Delta^2 S_x \gamma$$

Es $\phi_\Delta^2 S_x$ veces mayor que la SNR_D de transmisión bandabase. Pero las restricciones de PM ($\phi_\Delta < \pi$, $S_x \leq 1$) hace que no sean grandes mejoras en gral.

Ruido en FM

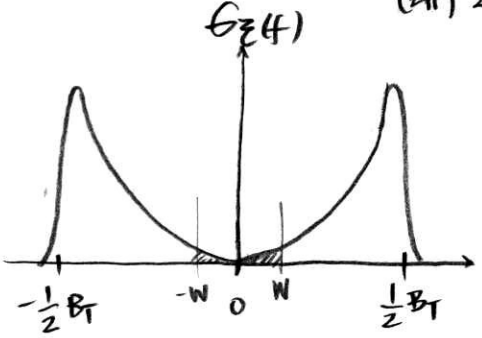
$$y_D(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\phi}_v(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\phi}(t) + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\dot{\psi}(t)}_{\xi(t)} = f_\Delta x(t) + \xi(t)$$

$$\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2S_R}}\frac{1}{2\pi}\cdot \dot{n}_q(t)$$

¿Cómo es $G_\xi(f)$? ¿Cómo es un filtro derivador?

$$G_\xi(f) = |H_{DERIVADOR}(f)|^2 G_{nq}(f) \qquad H_{DERIV}(f) = 2\pi f$$

$$\rightarrow G_\xi(f) = (2\pi)^2 f^2 \frac{1}{(2\pi)^2 2S_R}\eta\,\Pi\left(\frac{f}{B_T}\right) = \boxed{\frac{f^2}{2S_R}\eta\,\Pi(f/B_T) = G_\xi(f)}$$



SOBRE EL UMBRAL (EN RECEPCIÓN)

fm "expulsa" el ruido de la banda donde está el mensaje !!

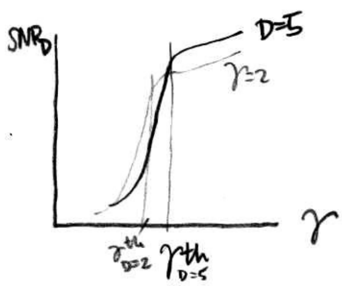
$$S_D = f_\Delta^2 S_x$$

$$N_D = \int_{-W}^{W} G_\xi(f)\,df = \frac{\eta}{2S_R}\left(\frac{f^3}{3}\Big|_{-W}^{W}\right) = \frac{\eta W^3}{3S_R}$$

$$SNR_D = \frac{3 f_\Delta^2 S_x S_R}{\eta W^3} = 3D^2 S_x \gamma$$

SOBRE EL UMBRAL $SNR_R \geq SNR_R^{th} = 10$

Efecto del umbral en la SNR_D



$$SNR_R = \frac{1}{2}\frac{A_c^2}{2\eta(D+2)W} = \frac{1}{2(D+2)}\gamma \geq 10$$

$$\gamma_{th} = 20(D+2)$$

\# En bajas frecuencias donde está el mensaje de interés, el ruido tiene poca potencia.
\# El efecto parabólico afecta con mayor potencia de ruido a las frec. mayores del mensaje
\# Aumento f_Δ y aumenta SNR_D (con igual S_T), pero aumenta B_T. Esto se llama intercambio $S_T \leftrightarrow B_T$
\# Existe un f_Δ que nos deja debajo del umbral (pues aumenta B_T y aumenta N_R)

Ejercicio Diseño de un sistema FM

$x(t)$: W, S_x
Canal : L y η
Parámetros : f_Δ, S_T

Se desea garantizar una cierta $SNR_D \geq SNR_{DO}$ en el destino con S_T mínima.

C_o

① - $SNR_D = 3D^2 S_x \gamma \geq SNR_{DO}$

② - $SNR_R = \dfrac{S_T}{\eta L B_T} \geq 10$

- $B_T = 2(D+2)W$

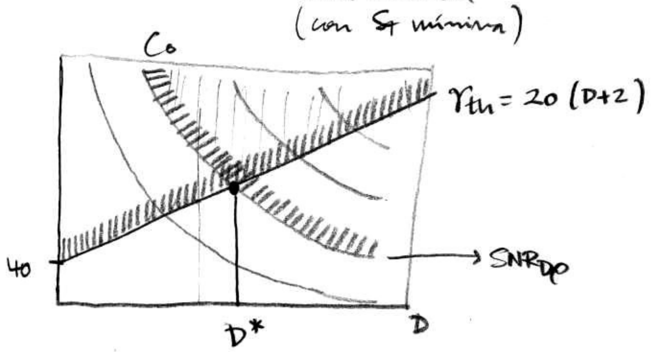
- $\dfrac{S_T}{\eta L 2(D+2)W} \geq 10 \Rightarrow \dfrac{\gamma}{2(D+2)} \geq 10 \rightarrow \underline{\gamma_{th} = 20(D+2)}$

El mínimo.

- $SNR_D = 3D^2 S_x \, 20(D+2) \geq SNR_{DO}$ o mejor $\gamma \geq \dfrac{SNR_{DO}}{3D^2 S_x}$

En el umbral (con S_T mínima)

$20(D+2) \geq \dfrac{SNR_{DO}}{3D^2 S_x}$



Ambas condiciones ① y ② se cumplen en las áreas sombreadas

El punto de menor S_T es (D^*, SNR_{DO})

FM Comercial

$f_\Delta = 75$ kHz $W = 15$ kHz $D = 5$ $B_T \cong 210$ kHz $S_x = \frac{1}{2}$

$SNR_D = 3D^2 S_x \gamma = \frac{1}{2} \, 3 \times 25 \, \gamma \cong 38\gamma$

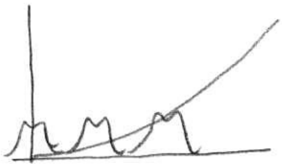
Si usamos filtros de pre / de-enfasis $B_{de} = 2{,}1$ kHz $SNR_D \cong 640\gamma$

En la práctica se aprovecha estas altas SNR_D's para disminuir S_T manteniendo la condición de umbral, intercambiando $S_T \longleftrightarrow B_T$

Filtros de pre / de-énfasis

El ruido en FM tiene densidad espectral de potencia parabólica $G_\xi(f) = \frac{\eta f^2}{2S_R}\Pi(f/B_T)$

Esto hace que el ruido en detección afecta de forma diferente a las bajas o a las altas frecuencias de los mensajes; y aún más cuando se multiplexan varios mensajes en banda base.



En este último caso los mensajes más cercanos a banda base estarán contaminados con menor cantidad de ruido

Para solucionar esto se introducen filtros de pre / de-énfasis que cambiarán la respuesta en frecuencia del ruido (y del mensaje)

$$H_{DE}(f) = \frac{1}{1 + j\frac{f}{B_{DE}}}$$

Para compensar el aumento parabólico del ruido.

B_{DE}: ancho de banda del filtro de deénfasis $\frac{W}{B_{DE}} \gg 1$

Tiene una respuesta frecuencial como una parábola inversa $|H_{DE}(f)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{f^2}{B_{DE}^2}}$

El efecto parabólico cancela el efecto del ruido logrando una densidad espectral de potencia del ruido uniforme en la banda del mensaje. Obviamente, también afecta el espectro del mensaje. Para resolver esto, el mensaje se pre-enfatiza, con un filtro de respuesta inversa, tal que $|H_{PE}(f)|^2 |H_{DE}(f)|^2 = 1$ $\quad H_{PE}(f) = \frac{1}{H_{DE}(f)}$

$$x(t) \;—\; \boxed{H_{PE}(f)} \;—\; \boxed{TX} \;—\!\sim\!—\; \boxed{RX} \;—\; \boxed{H_{DE}(f)} \;—\; \boxed{LPF} \;—$$

De esta forma el mensaje no se ve afectado por la pareja de filtros.

El filtro H_{PE} es una parábola, amplificando las altas frecuencias del mensaje. Esto puede implicar un aumento del ancho de banda del mensaje. Sin embargo bajo la condición $W \gg B_{de}$ y que $G_x(f)$ decaiga más rápido que $|1/f|$, esto no sucede

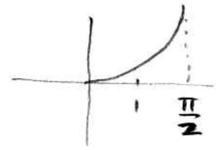
Relación Señal a Ruido con filtros Pre/De-énfasis

$$N_{D_{DE}} = \int_{-W}^{W} |H_{DE}(f)|^2 G_\xi(f)\,df = \frac{\eta B_{DE}^2}{2S_R}\int_{-W}^{W}\frac{f^2}{B_{DE}^2+f^2}\,df = \frac{\eta B_{DE}^2}{2S_R}\int_{-W}^{W}\frac{f^2+B_{DE}^2-B_{DE}^2}{B_{DE}^2+f^2}\,df =$$

$$= \frac{\eta B_{DE}^2}{2S_R}\int_{-W}^{W}\left[1-\frac{B_{DE}^2}{B_{DE}^2+f^2}\right]df = \frac{\eta B_{DE}^2}{2S_R}\left[f\Big|_{-W}^{W} - B_{DE}\,\mathrm{artg}\left(f/B_{DE}\right)\Big|_{-W}^{W}\right]=$$

$$= \frac{\eta B_{DE}^2}{2S_R}\left[2W - B_{DE}\,\mathrm{artg}\left(\frac{W}{B_{DE}}\right)+B_{DE}\,\mathrm{artg}\left(-\frac{W}{B_{DE}}\right)\right] = \frac{\eta B_{DE}^3}{S_R}\left[\frac{W}{B_{DE}} - \underbrace{\mathrm{artg}\left(\frac{W}{B_{DE}}\right)}_{\sim\frac{\pi}{2}}\right]$$

Si $\frac{W}{B_{DE}} \gg 1 \Rightarrow \mathrm{artg}\left(\frac{W}{B_{DE}}\right) \sim \frac{\pi}{2} \ll \frac{W}{B_{DE}}$



$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} N_{D_{DE}} = \dfrac{\eta B_{DE}^2 W}{S_R} \\ S_D = f_\Delta^2 S_X \end{array}\right\} \; SNR_{D_{DE}} = \frac{f_\Delta^2 S_X S_R}{\eta B_{DE}^2 W} = \frac{W^2}{B_{DE}^2} D^2 S_X \gamma$$

SOBRE EL UMBRAL

El ruido en modulación tiene componentes fuera de la banda del mensaje

El ruido en PM es plano mientras que en FM es parabólico

Los filtros de pre/de-énfasis compensan la diferencia de ruido en las bandas de FM

El ruido en PM y FM disminuye al aumentar S_R (efecto al cambiar de radioFM)