

Realce y Restauración de imagen*

Pedro Daniel Peguero Núñez

1 Imagen digital

En numerosas ocasiones se piensa en "lo que se ve" como en "lo que está ahí", cuando en realidad el ojo humano sólo percibe una pequeña zona del espectro electro-magnético (E-M) conocida como "espectro visible". Con el avance de la tecnología existe un amplio rango de la radiación E-M que se puede detectar y registrar como imágenes, para posteriormente analizar, transmitir o almacenar (figura 1).

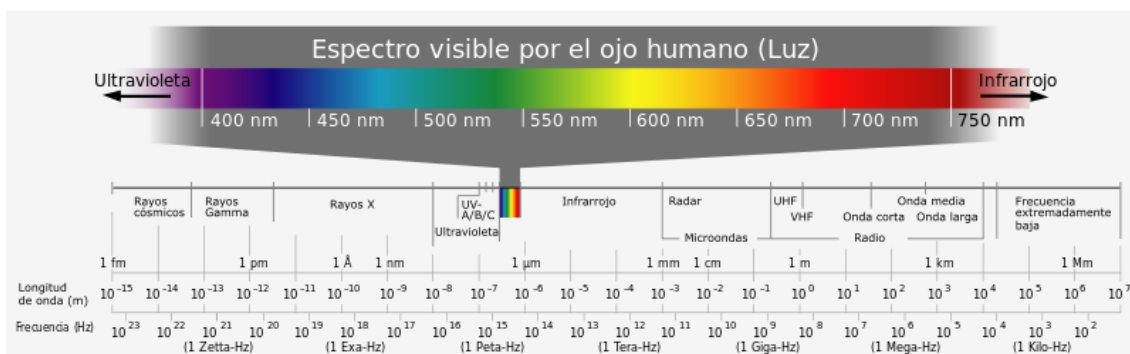


Figura 1: Espectro Electro-Magnético.

Son muchos los ejemplos de cómo la ciencia no sólo utiliza el espectro visible para obtener la máxima información del exterior. De hecho, algunas de las novedades más interesantes en imágenes médicas, han surgido a partir de nuevos sensores que registran imágenes de fuentes hasta ahora poco utilizados de la radiación electro-magnética. La tomografía por emisión de positrones (PET) o las resonancias magnéticas son algunos ejemplos.

Por otro lado, las ondas no electromagnéticas son también útiles para obtener imágenes. Algunos buenos ejemplos son las ondas sonoras de alta frecuencia (ultrasonidos) que se utilizan para crear imágenes del cuerpo humano en las ecografías, o las ondas sonoras de baja frecuencia que son utilizadas por las empresas petrolíferas para la prospección del subsuelo de la superficie de la tierra.

En general todas las ramas de la ciencia recogen información del universo que posteriormente representan en un formato que sea adecuado para la visualización humana, como se muestra en la figura 2. Pudiendo ser estos datos considerados como imágenes y procesados mediante técnicas establecidas para el procesamiento de imágenes, incluso si la información no se ha derivado de fuentes de luz visible.

*Extraído del PFC *Diseño y desarrollo de una aplicación de realce y restauración de imagen para la plataforma Android.*

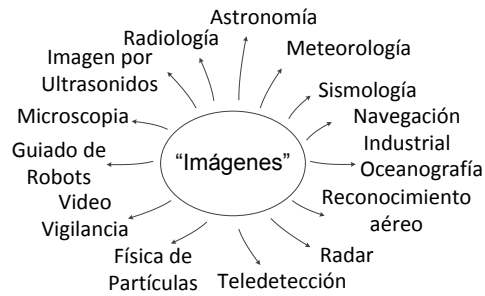


Figura 2: Parte del universo de aplicaciones de procesamiento de imágenes.

En general, el propósito de la formación de imágenes es extraer información física sobre la fuente de radiación y/o los objetos con los que ha interactuado. Dichas imágenes pueden ser de naturaleza *reflejada*, al incidir la luz en la superficie de los objetos, como en la mayoría de las imágenes ópticas cotidianas; *emitida*, como son las imágenes infrarrojas; o *absorbida* en el caso de las imágenes por rayos-X. En la figura 3 se observa un esquema del origen de la formación de las imágenes.

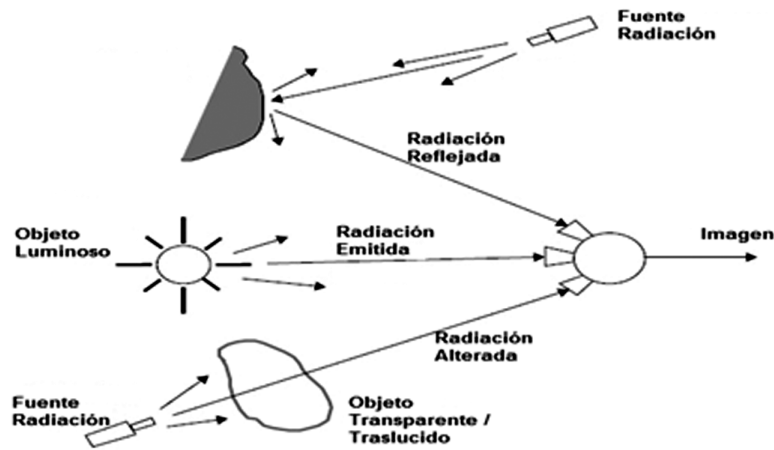


Figura 3: Interacción de la radiación E-M con los objetos.

Las señales e imágenes que se aprecian en la naturaleza son de carácter analógico, entendiendo como tal, que son señales continuas en el dominio espacio/tiempo. Por lo tanto, una imagen se puede representar como una función bidimensional $f(x, y)$, donde x e y son las coordenadas espaciales y el valor de f en un punto cualquiera (x, y) es proporcional al brillo de la imagen en ese punto, y por supuesto, puede tomar cualquier valor posible.

Sin embargo, para el procesado digital se hace necesario que una vez que ha sido detectada la imagen $f(x, y)$, ésta debe ser digitalizada para que pueda ser comprensible por un ordenador. Esta nueva imagen será una señal bidimensional con coordenadas espaciales discretas, que puede tomar valores de un conjunto discreto de valores.

A partir de aquí, una imagen digital, suponiendo que se trate de una imagen monocroma, puede considerarse como una matriz cuyos índices de filas y columnas identifican un punto de la imagen y el valor del correspondiente elemento de la matriz indica el nivel de gris en

ese punto. Esto es lo que se conoce como píxel, abreviatura del término en inglés "picture elements".

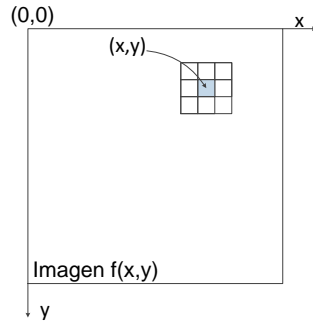


Figura 4: Imagen Digital.

Si por el contrario se tratara de una imagen en color, la información de ese punto se codificaría según el espacio de color que se fuera a utilizar, creando una imagen multicanal. Estos espacios de color proporcionan un método para representar, ordenar y manipular los colores. El principio en el que se basan la mayoría de estos modelos consiste en que a partir de la combinación de tres colores primarios se puede obtener cualquier color de la naturaleza.

La amplia mayoría de los modelos se han creado para aplicaciones específicas, dando lugar a diferentes tipos de espacios de color: *RGB*, *CMYK*, *HSB*, *Lab*, *YCbCr* ... que difieren en la construcción de los círculos cromáticos que utilizan cada uno. Por ejemplo, el *HSB* está basado en tono-saturación-brillo, el modelo *CMYK* utiliza la mezcla sustractiva de los colores *Cian-Magenta-Amarillo-Negro*, o el modelo *RGB* basado en la mezcla aditiva de los primarios luz *rojo, verde y azul*.

2 Técnicas de realce

Una vez que la imagen está digitalizada es posible mejorar la apariencia visual de la misma, o transformarla de tal forma que facilite su análisis computarizado para una aplicación específica. Este es el objetivo de las técnicas de realce. Es importante destacar el término *específico*, ya que el resultado de estos métodos depende en gran medida de la imagen que se quiere mejorar. Así por ejemplo, un algoritmo que obtenga buenos resultados con radiografías, puede no conseguir los mismos resultados en imágenes procedentes del espacio.

Es interesante destacar que la valoración del resultado de cualquiera de estas técnicas es altamente subjetiva. Si bien, en el procesado de una imagen para su análisis computarizado, se puede definir la bondad de los métodos utilizados en función de los resultados obtenidos por parte de la máquina, en el caso de la interpretación visual, será una persona quien juzgue si un método funciona bien o mal, siendo imposible generalizar un criterio para cada ocasión.

Los métodos de realce de imágenes pueden realizarse tanto en el dominio espacial como en el de la frecuencia. Los del primer grupo se caracterizan por operar directamente sobre los píxeles de la imagen, mientras que los del segundo grupo modifican una transformada de ésta, (*Fourier*, *DCT*, *wavelet*, ...) para obtener los resultados.

Los métodos de realce en el dominio espacial se pueden clasificar en dos tipos:

- **Realce punto a punto:** son aquellas técnicas cuyas operaciones se efectúan sobre el valor del píxel, sin tener en cuenta los píxeles vecinos. Sirve para mejorar condiciones de bajo contraste, baja luminosidad o demasiada claridad.
- **Realce con operaciones entre vecinos:** con ayuda de una máscara o *kernel*, las operaciones son efectuadas sobre un píxel tomando en cuenta su píxeles vecinos. Son útiles cuando se busca reducir ruido, detectar bordes o generar algún tipo de efecto artístico.

La base de las técnicas en el dominio de la frecuencia radica en el teorema de la convolución:

Sea $g(x, y)$ una imagen formada por la convolución de un imagen $f(x, y)$ y un filtro invariante de posición $h(x, y)$, entonces se cumple que:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \iff G(u, v) = F(u, v)H(u, v) \quad (1)$$

siendo G , F y H la transformada de Fourier de g , f y h respectivamente.

Por tanto, bastará con realizar la transformada inversa del producto de la función de transferencia H con F para obtener la imagen deseada $g(x, y)$. Ésta presentará resaltada alguna característica de la imagen original $f(x, y)$, como por ejemplo, se pueden acentuar los bordes utilizando una función H que enfatice las altas frecuencias.

Las funciones punto a punto se pueden englobar fundamentalmente en dos categorías: las *transformaciones de intensidad simples* y las técnicas de *procesado del histograma*. En las secciones 2.1 y 2.2 se explicarán más detalladamente estas técnicas. A continuación, en la sección 2.3 se describirán las operaciones entre vecinos también conocidas como *filtrado espacial*. Y por último, en la sección 2.4 se comentarán brevemente las operaciones en el dominio frecuencial.

2.1 Transformaciones de intensidad simples

Tal y como se indicó en la sección 2, en estas técnicas de realce el valor de g en el punto (x, y) depende únicamente del valor de f en ese punto. Por tanto, la función T que define la operación sobre el píxel quedaría de la forma de la ecuación (2).

$$s = T(r) \quad (2)$$

Donde por simplificar la notación, r y s son variables que indican el valor de $f(x, y)$ y $g(x, y)$ en cada punto (x, y) respectivamente. A este operador se le conoce como función de transformación de nivel de gris. A continuación se detallan las operaciones más frecuentes.

2.1.1 Imagen en escala de grises:

Consiste en obtener una imagen monocroma a partir de una imagen en color. En función del espacio de color con el que se esté trabajando esta operación se realizará de una forma u otra. Por ejemplo, en el caso de RGB se puede utilizar la ecuación (3) para obtener la señal luminancia.

$$Y = 0,299R + 0,587G + 0,114B \quad (3)$$

2.1.2 Negativo de imágenes:

Esta sencilla transformación invierte los niveles de blanco a negro con el fin de obtener el negativo de la imagen de entrada. En concreto, si la señal está en escala de grises, y está comprendida dentro del rango $[0, L-1]$, siendo 0 el nivel de negro y $L-1$ el de blanco, bastaría con hacer la transformación lineal que se indica en la ecuación (4).

$$s = (L - 1) - r \quad (4)$$

2.1.3 Aumento del contraste:

Estas transformaciones consisten en aumentar el rango dinámico de los niveles de gris de la imagen por medio de un operador $T(r)$. Un caso límite de estas transformaciones es el operador *umbral*, que genera una imagen binaria a partir de la original. Su función se podría definir como se indica en la ecuación (5).

$$T(r) = \begin{cases} 1, & \text{si } r \geq \text{umbral} \\ 0, & \text{si } r < \text{umbral} \end{cases} \quad (5)$$

El contraste de la imagen puede ser bajo debido a diversas razones, como la falta de iluminación o un sensor deficiente.

En la figura 5a se puede ver el resultado de aplicar un aumento de contraste a la imagen "pimientos", mientras que a la figura 5b se le ha reducido el rango dinámico, operación que se explica a continuación.

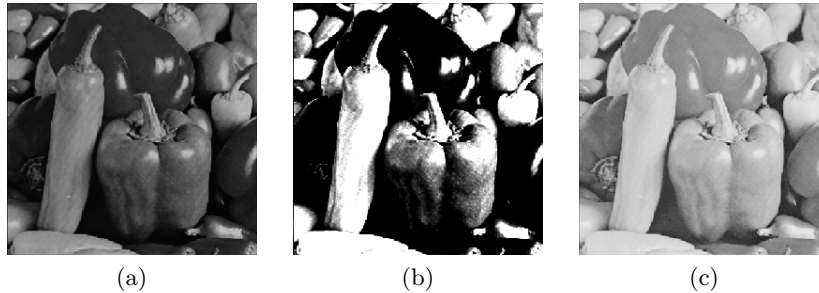


Figura 5: (a) Imagen original. (b) Aumento de contraste. (c) Compresión de rango dinámico.

2.1.4 Compresión del rango dinámico:

En ocasiones interesa justo lo contrario que en el caso anterior, es decir, reducir el rango dinámico de la imagen. La función *logaritmo* de la ecuación (6) consigue eso exactamente. Un ejemplo clásico de este problema sucede a la hora de querer representar el módulo de la transformada de *Fourier*.

$$s = c \log(1 + r) \quad (6)$$

donde c es una constante para que los valores de salida estén dentro del rango $[0, L-1]$, siendo L el número de niveles de gris.

2.1.5 Fraccionamiento del nivel de gris:

En algunas aplicaciones es interesante destacar un determinado rango de niveles de gris, como por ejemplo en la búsqueda de masas de agua en imágenes por satélite. Se suele emplear dos técnicas bastante similares entre sí. La primera es dar un valor alto a los niveles dentro del rango y un valor bajo al resto, consiguiendo una imagen binaria. La otra opción también adjudica un valor alto al rango de niveles seleccionados, pero preserva el fondo (el resto) con la tonalidad de grises de inicio.

$$T(r) = \begin{cases} 1, & \text{si umbral } 1 \leq r \leq \text{umbral } 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (7)$$

2.1.6 Posterización:

También llamado reducción de niveles de gris en imágenes monocromas, consiste en reducir el número de tonos de color que puede tener la imagen creando una serie limitada de zonas planas de valor constante. Puede ser útil para eliminar los artefactos en los bordes de la imagen producidos por la compresión JPEG, o para realizar efectos artísticos creando un efecto tipo "póster".

$$s = X \cdot \frac{r}{N} \begin{cases} X, & \frac{L-1}{n-1} \\ N, & \frac{L}{n} \\ L, & \text{número de niveles de la imagen original} \\ n, & \text{número de niveles de la imagen procesada} \end{cases} \quad (8)$$

2.2 Procesado de histogramas

El *histograma* de una imagen con L niveles de gris es una función discreta $h(r_k) = n_k$, donde r_k es el k -ésimo nivel de gris, n_k es el número de píxeles de la imagen con ese nivel de gris y $k = 0, 1, 2, \dots, L - 1$.

En otras ocasiones puede resultar más útil el *histograma normalizado*, que se define como $p(r_k) = n_k/N$, donde N es el número total de píxeles de la imagen. Esta función tiene la propiedad que se indica en la ecuación (9).

$$\sum_{k=0}^{N-1} p(r_k) = 1 \quad (9)$$

De forma general, se puede decir que el histograma normalizado $p(r_k)$ representa la probabilidad de que aparezca un determinado nivel de gris r_k en la imagen. Así mismo, la representación gráfica del histograma muestra una idea del aspecto que posee la imagen, esto es, proporciona información sobre su intensidad media y la dispersión de los valores de nivel de gris de ésta, siendo por tanto, una medida del contraste de la imagen.

Por ejemplo, un histograma con la mayoría de sus valores en el extremo oscuro, indica que la imagen es oscura (figura 6a), y por el contrario, si están en el extremo claro (figura 6b) significa que la imagen es en general brillante. También si el histograma tiene un perfil estrecho (figura 6c), es decir, todos sus valores se concentran en un rango pequeño, indica que la imagen tiene poco rango dinámico, y por lo tanto, bajo contraste. Un histograma espaciado (figura 6d) significaría lo contrario, una imagen de alto contraste.

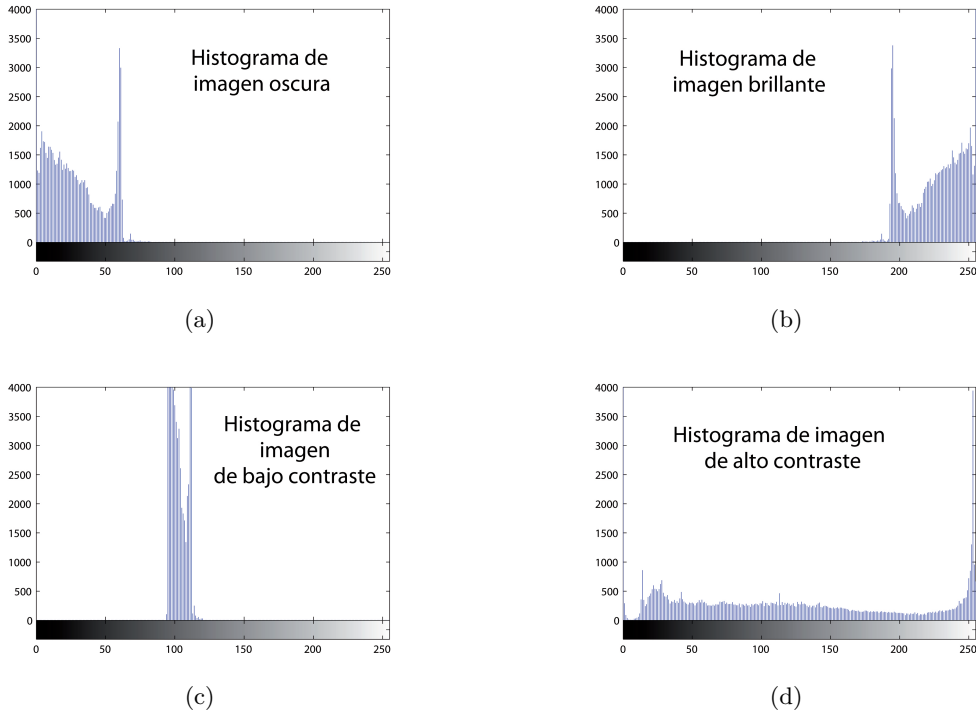


Figura 6: Ejemplos de histogramas.

Por toda la información que se puede extraer de la imagen de una forma rápida y sencilla, el histograma es la base de numerosas técnicas de procesamiento de la imagen en el dominio espacial.

A continuación se presentan los métodos más característicos del procesamiento del histograma para el realce de la imagen.

2.2.1 Ecuación del histograma:

Se trata de conseguir una imagen con el histograma uniformemente distribuido a través de una función de transformación $T(r)$. Este procedimiento asigna mayor rango dinámico a los niveles más frecuentes en la imagen de entrada, consiguiendo aumentar el contraste de la imagen original. Esta función de transformación $T(r)$ controlará la función de densidad de probabilidad de los niveles de gris de la imagen, que es lo que permite modificar su aspecto.

Por otro lado, se define la función del histograma acumulativo como el sumatorio de todos los píxeles cuyo nivel de gris es menor o igual que el considerado en ese instante, tal y como muestra la ecuación (10). Esta función es una buena aproximación a la función de distribución de probabilidad.

$$P_f(r) = \sum_{k=0}^r p(r_k) \quad (10)$$

De la ecuación (10) se extrae que es sencillo obtener el histograma acumulativo a partir del histograma y viceversa.

$$p(r_k) = P_f(k) - P_f(k - 1) \quad (11)$$

Para entender el funcionamiento de la ecualización del histograma, se asume que la imagen se compone de N variables aleatorias X_i , equidistribuidas, donde N representa al número de píxeles de la imagen. Se pretende que las variables aleatorias estén uniformemente distribuidas en todo el rango de niveles de gris, y para ello basta con transformarlas con una función de distribución $F_Y(y)$.

$$Y_i = F_Y(X_i) \quad (12)$$

En la práctica, como se desconoce $F_Y(y)$, se toma al histograma acumulativo como la función de distribución de la variable con la que ecualizar el histograma. La variable aleatoria obtenida en la ecuación (12) es uniforme entre 0 y 1, y por tanto, será necesaria una sencilla transformación de la intensidad para llevar la variable al rango deseado $[0, L-1]$.

2.2.2 Especificación del histograma:

El problema del método anterior es que sólo conduce a la aproximación de un histograma plano. En algunas aplicaciones es interesante destacar determinados rangos de grises mediante la especificación de diferentes perfiles de histograma. Este método, también conocido como *Histogram Shaping*, se puede considerar como una generalización del método anterior, en la que el objetivo era una forma plana del histograma.

Para ver como puede realizarse este método, supongamos que se ha obtenido una imagen con el histograma plano mediante la ecuación (12), y que si la imagen deseada estuviera disponible, se podría ecualizar con la función de distribución $G_Z(z)$. Con el proceso inverso $z = G_Z^{-1}(s)$ se obtendrían los valores de la imagen deseada.

Esta operación proporciona una imagen procesada de la original cuyos niveles de gris están caracterizados por la función densidad especificada. Aunque este procedimiento implica dos funciones de transformación, $F_Y(y)$ seguida de $G_Z^{-1}(s)$, se puede generar toda la operación en un único paso mediante la combinación de ambas funciones:

$$s = G_Z^{-1}(F_Y(r)) \quad (13)$$

El principal problema de esta técnica es especificar la función de distribución, lo cual puede hacerse, bien mediante una distribución específica (gaussiana), o mediante una interfaz gráfica que permita al usuario introducir la forma deseada.

La figura 7 muestra un ejemplo en el que se observa como la estimación del histograma (figura 7c) obtiene mejores resultados que la ecualización (figura 7b) para el realce de una fotografía de la luna.

2.2.3 Procesado local:

Si los dos métodos anteriores se aplican sobre toda la imagen, entendiéndose como tal, que los píxeles se modifican mediante una función de distribución que tiene en cuenta todos los niveles de gris de la imagen, se consideran globales. Sin embargo, en ciertas aplicaciones es posible obtener mejores resultados para ciertas zonas de la imagen si para el cálculo de la función de distribución se tienen en cuenta únicamente una vecindad de los píxeles, lo que se conoce como procesado local del histograma.

En la figura 8 se muestra un ejemplo de procesado por bloques de una imagen con el objetivo de averiguar el número de matrícula de la imagen original. Se observa cómo aunque visualmente el resultado en la imagen con el procesado global es mejor (figura 8b), en el caso del procesado por bloques existe un mayor contraste en la zona de la matrícula (figura 8c).

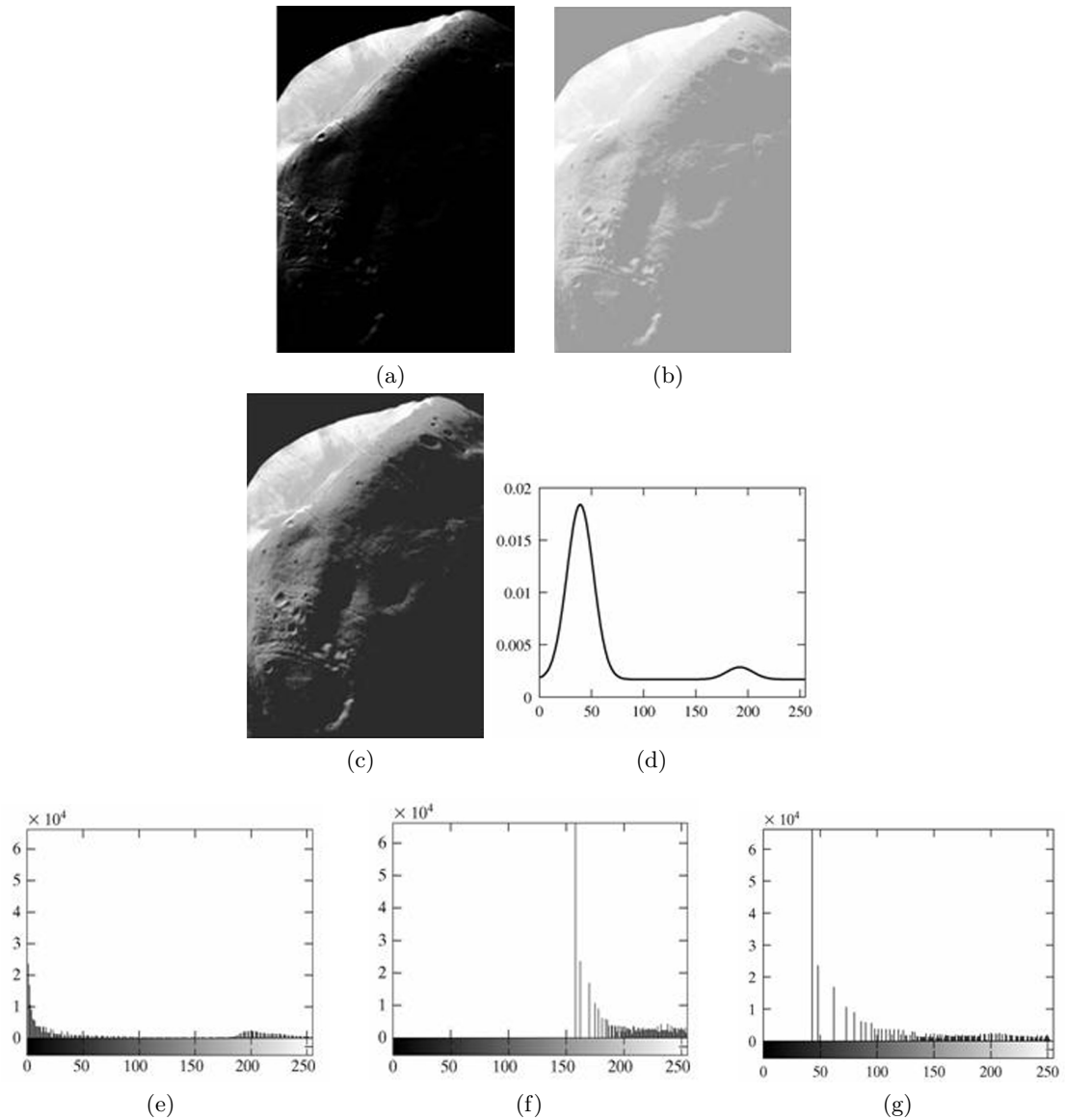


Figura 7: Ejemplos de histogramas ecualizados. (a) Imagen original. (b) Imagen con histograma ecualizado. (c) Imagen con especificación del histograma. (d) Función histograma especificado. (e) Histograma original. (f) Histograma ecualizado. (g) Histograma especificado.

2.3 Filtrado espacial

Existe cierto paralelismo entre el filtrado espacial y el filtrado en el dominio de la frecuencia. Si bien en ambos se aplica una operación para variar la contribución de determinados rangos de la frecuencia y así resaltar o suprimir información contenida en una imagen, en las operaciones espaciales se trabaja directamente sobre los píxeles de la misma, aplicando la relación existente entre la convolución espacial y la multiplicación en frecuencia. (ecuación (1)).

Tal y como se introdujo en el apartado 2, en el procesado espacial el valor que toma el píxel en la imagen realizada tiene en cuenta tanto el píxel en esa misma posición en la imagen original, como el valor de los píxeles vecinos a éste. Estas técnicas se realizan

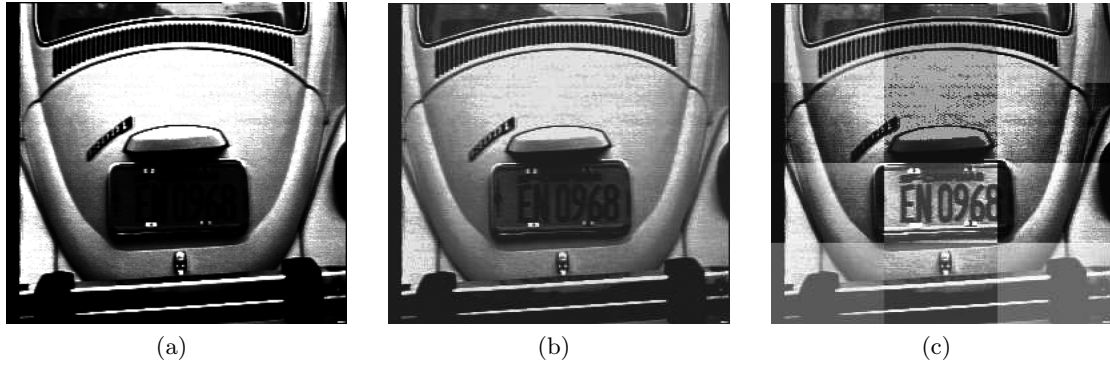


Figura 8: Ejemplos de histogramas ecualizados. (a) Imagen original. (b) Imagen con ecualización del histograma. (c) Imagen procesada por bloques.

mediante un operador T de la forma:

$$s = T(r_0, r_i) \quad (14)$$

donde r_0 es el valor del píxel que se está evaluando y r_i son los valores de intensidad de sus píxeles vecinos.

Aunque existen algunos caso en los que el operador T no tiene carácter convolutivo, como es el caso del *filtro de mediana*, en la mayoría de los casos es una función lineal de los píxeles de entrada de la forma:

$$s = \lambda_0 \cdot r_0 + \sum_{i=1}^{P \times P} (\lambda_i \cdot r_i) \quad (15)$$

Es habitual utilizar una máscara cuadrada de $P \times P$ píxeles para realizar la convolución de la misma con la imagen original. En función de los coeficientes de la máscara, aunque la máscara puede tener diferentes formas (circular, rectangular . . .), lo que aumentaría la complejidad computacional del filtro. De los valores de los coeficientes se puede detectar si la operación sería el equivalente en frecuencia de filtros paso-bajo, paso-alto o paso-banda.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}
λ_{11}	λ_{12}	λ_0	λ_{13}	λ_{14}
λ_{15}	λ_{16}	λ_{17}	λ_{18}	λ_{19}
λ_{20}	λ_{21}	λ_{22}	λ_{23}	λ_{24}

Figura 9: Máscara de procesamiento espacial con $P=5$.

Los filtros no lineales también operan sobre un vecindario, pero en esta ocasión el operador T es una función no lineal cuya operación se basa directamente en el valor de los píxeles para obtener el valor deseado. Algunos ejemplos de estos filtros son: el filtro de los mínimo, que busca el valor mínimo de todos los píxeles dentro de la zona de búsqueda; el de máximo, que realiza lo contrario, buscando los puntos más brillantes; y el de mediana, que obtiene el valor medio, siendo útil para la reducción del ruido.

A continuación se muestran algunas implementaciones de estos filtros que se han utilizado en la realización de este proyecto.

2.3.1 Máscaras de suavizado

El efecto es el mismo que si en el dominio transformado se dejaran pasar únicamente las bajas frecuencias, y por tanto, se suavizan los bordes de la imagen.

Aunque existen distintas configuraciones para este tipo de filtro, en general los coeficientes de la máscara son todos positivos, otorgando diferentes pesos a los píxeles del vecindario en función de la contribución que se desee.

Además es habitual que estos coeficientes estén normalizados, para que su suma global sea igual a 1 y no amplifiquen la energía de la imagen original.

- **Filtro promediado:**

Estos filtros realizan un promediado respecto a los píxeles sobre los que se está operando. Una configuración típica para una máscara con $P = 3$ se muestra en la figura 10.

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 10: Máscara de promediado con $P=3$.

Estas máscaras son útiles a la hora de reducir el ruido cuando sólo se dispone de una imagen. Aunque será necesario seleccionar convenientemente el tamaño del filtro, para que la pérdida de nitidez no sea excesiva debido a que un aumento del tamaño de la ventana implica más píxeles para el promediado, aumentándose así, el efecto de desenfoque.

- **Filtro de media ponderada:**

Al igual que el anterior, estos filtros realizan un promediado respecto a los píxeles sobre los que se está operando; sin embargo, se le da mayor peso a uno de los píxel (generalmente el central), para evitar en la medida de lo posible que la imagen aparezca borrosa.

Un posible diseño de este filtro aparece en la figura 11, en la que se puede observar que al píxel central se le da un peso mayor que al resto.

$$\frac{1}{16} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 11: Máscara de media ponderada con $P=3$.

- **Filtro gaussiano:**

En esta ocasión se busca crear un filtro paso-bajo mediante una máscara que imita a la función de la campana de *Gauss* (figura 12).

La función gaussiana está definida por la expresión de la ecuación (16).

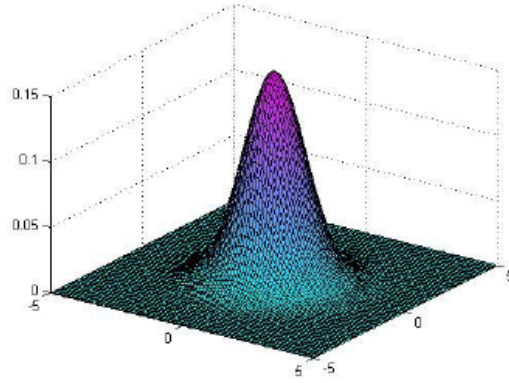


Figura 12: Campana de Gauss.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (16)$$

Se puede obtener de una forma sencilla una aproximación discreta por medio de los **filtros binomiales** de orden N , utilizando para ello los coeficientes del triángulo de *Pascal*.

N	
1	1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

Figura 13: Triángulo de Pascal.

Los filtros binomiales de 2 dimensiones se obtienen mediante el producto definido por la ecuación (17), donde $[f_N(x)]$ es la función binomial de orden N y $[f_N(x)]^T$ su traspuesta.

$$[f_N(x)]^T \times [f_N(x)] \quad (17)$$

La figura 14 muestra un ejemplo para un filtro de orden $N=2$, creándose una máscara con $P=3$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times [1 \quad 2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 14: Máscara filtro gaussiano.

Tal y como se explicó anteriormente, para evitar una posible saturación de la imagen procesada, los valores de la máscara se escalan para que la suma total de todos los coeficientes sea 1. En el caso del ejemplo de la figura 14 este factor sería $1/16$.

- **Filtro de mediana:**

Este es un filtro no lineal de estadísticos ordenados en el que la máscara se utiliza para seleccionar el valor del píxel de la posición central una vez que se han ordenado de menor a mayor los píxeles que están dentro de la zona de estudio o ventana.

Tiene la ventaja de no crear ningún valor nuevo de intensidad, sino que toma uno que ya está presente en la imagen. Además evita la influencia de valores atípicos que en el caso del promediado podrían empeorar el resultado. Por esta razón estos filtros son útiles para reducir el ruido impulsivo.

Por contra, es una operación más compleja, pues hay que ordenar previamente los valores que conforman la ventana para poder extraer el píxel central. En la figura 15 se muestra un ejemplo de esta ordenación.

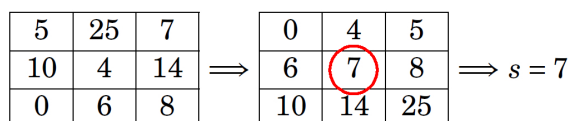


Figura 15: Ordenación de valores con filtro mediana con P=3.

2.3.2 Detección de bordes

La finalidad de estos filtros es resaltar los bordes de la imagen y destacar los detalles finos de la misma; entendiendo el término *borde* como un cambio abrupto en el nivel de intensidad.

Si bien dentro de este grupo se pueden englobar cualquier configuración equivalente al paso-alto en frecuencia, es habitual utilizar el *gradiente* y el *laplaciano* para detectar las zonas de la imagen con mayor variación de intensidad.

- **Operadores discretos del gradiente:**

La detección de bordes mediante estos métodos se basa en el operador gradiente:

$$\nabla f_c(x, y) = \frac{\partial f_c(x, y)}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial f_c(x, y)}{\partial y} \vec{y} \quad (18)$$

Al trabajar con imágenes discretas, estos operadores se caracterizan por ser una aproximación a la primera derivada y tener un fuerte carácter direccional.

Existe una gran cantidad de máscaras que permiten aproximar las derivadas parciales en el ámbito discreto, pero todas tienen en común que sus coeficientes tienen valores tanto negativos como positivos, y que la suma de todos los coeficientes da lugar a cero, para que la respuesta del filtro en frecuencias espaciales cero sea nula.

Las versiones más conocidas son *los gradientes de Roberts, Prewitt y Sobel*. Todas ellas poseen dos versiones según la dirección en la que se quiere evaluar el gradiente.

La figura 16 muestra las diferentes máscaras que se pueden emplear para calcular las derivadas parciales en función de la dirección.

- **Operadores discretos del laplaciano:**

$$\begin{array}{cccc}
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
\text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)} & \text{(d)} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
\text{(e)} & \text{(f)} & \text{(g)} & \text{(h)}
\end{array}$$

Figura 16: Máscaras de gradiente. (a) Derivada parcial horizontal. (b) Derivada parcial vertical. (c) Operador de Roberts (135°). (d) Operador de Roberts (45°). (e) Operador de Prewitt (vertical). (f) Operador de Prewitt (horizontal). (g) Operador de Sobel (vertical). (h) Operador de Sobel (horizontal).

Un inconveniente del anterior operador es que requiere un par de filtros ortogonales para poder realizarse, puesto que el gradiente es un vector. Por el contrario, la detección de bordes basada en el operador laplaciano, al ser éste un escalar, necesitará únicamente un filtro. El operador laplaciano se define:

$$\nabla^2 f_c(x, y) = \frac{\partial^2 f_c(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_c(x, y)}{\partial y^2} \quad (19)$$

Una máscara del laplaciano puede obtenerse fácilmente a partir de las aproximaciones de la primera derivada en x e y , usando por ejemplo la ecuación en diferencias de la ecuación (20).

$$\frac{\partial f_c(x, y)}{\partial x} \rightarrow f_x(n1, n2) = f(n1 + 1, n2) - f(n1, n2) \quad (20)$$

La segunda derivada en x puede ser construida mediante la aplicación de la ecuación en diferencias a la ecuación (20):

$$\frac{\partial^2 f_c(x, y)}{\partial x^2} \rightarrow f_{xx}(n1, n2) = f_x(n1 + 1, n2) - f_x(n1, n2) \quad (21)$$

Combinando las ecuaciones (20) y (21):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_c(x, y)}{\partial x^2} \rightarrow f_{xx}(n1, n2) &= f(n1 + 1, n2) - 2f(n1, n2) + f(n1 - 1, n2) \\
&= [1 \quad -2 \quad 1]
\end{aligned} \quad (22)$$

De manera similar se obtendría la segunda derivada en y :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_c(x, y)}{\partial y^2} \rightarrow f_{yy}(n1, n2) &= f(n1, n2 + 1) - 2f(n1, n2) + f(n1, n2 - 1) \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (23)$$

Por último, bastaría sumar el resultado de ambas ecuaciones, (20) y (21), para obtener el filtro $h(n1, n2)$ que muestra la figura 17.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura 17: Máscara de laplaciano.

La figura 18 muestra otras 2 posibles implementaciones para un filtro laplaciano con $P=3$. El resultado dependerá de la aproximación a la primera derivada que se considere.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{(a)} & \text{(b)} \end{array}$$

Figura 18: Máscaras de laplaciano.

2.3.3 Máscaras de enfoque

Estas técnicas se basan en el concepto de "enmascaramiento difuminado", o en su término en inglés: *unsharp-masking*. Este método opera restando a la imagen original una parte de su correspondiente paso-bajo, tal y como se indica en la ecuación (24). Al finalizar el proceso se obtiene una imagen con los bordes afilados con más nitidez y contraste que la original.

$$\begin{aligned} H_{unsharp-masking} &= A \cdot Original - H_{paso-bajo} \\ &= (A - 1) \cdot Original + Original - H_{paso-bajo} \\ &= (A - 1) \cdot Original + H_{paso-alto} \end{aligned} \quad (24)$$

Tal y como se puede observar en la ecuación (24), el resultado es equiparable a un filtrado paso-alto al que se le añade parte de la imagen original, lo que le devuelve, parcialmente, las componentes de baja frecuencia perdidas. Es por esto que estas técnicas también se conocen por "énfasis de las altas frecuencias" o *high-boost*. El grado de mejora por tanto, dependerá del parámetro A . Un ejemplo de esta máscara se encuentra en la figura 19.

$$\frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 26 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Figura 19: Máscara de enfoque.

La mayoría de las aplicaciones comerciales como *Photoshop* o *Gimp*, aplican un desenfoque gaussiano para obtener la versión filtrada paso-bajo.

2.3.4 Máscaras artísticas

El uso de máscaras en el realce de la imagen no sólo se emplea para eliminar el ruido o detectar los bordes, también se pueden obtener efectos artísticos en función de los coeficientes de la matriz.

Por ejemplo se puede simular un efecto de relieve de la imagen original con el filtro de la figura 20a y un grabado con la figura 20b.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 95 + \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) (b)

Figura 20: Máscaras artísticas. (a) Máscara relieve. (b) Máscara grabado

En la figura 21 se puede ver el resultado de aplicar estas dos máscaras sobre la imagen original "pimientos" de la figura 5.

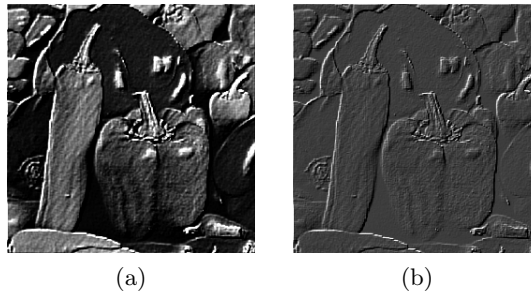


Figura 21: (a) Efecto relieve. (b) Efecto grabado.

2.4 Filtrado en el dominio de la frecuencia

Hasta ahora se ha considerado a la imagen digital como una matriz cuyos píxeles representan un valor proporcional al nivel de brillo de la imagen. Definición dada en la sección 1, y es lo que se considera como dominio espacial.

Sin embargo, la misma imagen puede ser considerada como una función no periódica, y definirse en otro espacio bidimensional cuyos ejes vengan determinados por la amplitud y frecuencia para cada dirección de la imagen. Esto es lo que se conoce como el dominio frecuencial.

Al igual que en el procesamiento de señales de 1 dimensión, para cambiar del dominio espacial al de la frecuencia, en 2 dimensiones se utiliza la versión bidimensional de la "transformada de Fourier". Además, esta posee las mismas propiedades que su homóloga de 1-D.

Para utilizarla en imágenes digitales se emplea la *Transformada de Fourier Discreta* o DFT, cuya expresión se muestra en la ecuación (25).

$$F(u, v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{-j2\pi(Um+Vn)} \quad (25)$$

Tal y como ocurre en el dominio temporal, en el que las variaciones rápidas de amplitud equivalen a valores altos en las componentes de alta frecuencia, y por el contrario, las variaciones lentas se corresponden con la baja, en el caso de 2-D es fácil asociar las frecuencias espaciales con patrones de variación de la intensidad de la imagen.

Así por ejemplo, las frecuencias bajas corresponden a zonas homogéneas de la imagen, es decir, valores que varían lentamente, como se puede ver en la figura 22, que muestra la imagen "pimientos" y el módulo de su DFT (*Discrete Fourier Transform*). Esta imagen principalmente posee zonas homogéneas separadas por cambios bruscos de intensidad. Las zonas lisas contribuyen al valor de las componentes de baja frecuencia, lo que provoca un valor alto en la zona central de la DFT. En concreto, el punto central con $v = u = 0$ es lo que se conoce como componente de continua de la imagen, y equivale al valor de gris promedio.

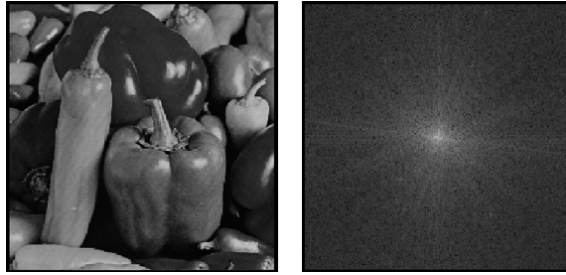


Figura 22: (a) Imagen "pimientos". (b) El módulo de su DFT.

Por otro lado, las variaciones rápidas de la intensidad debidas a los bordes o también al ruido, se corresponde con los valores de las frecuencias altas. La figura 23 representa una imagen de un trenzado de mimbre que provoca un patrón repetitivo en la imagen DFT. Claramente esta serie de picos se deben a los armónicos de la imagen, presentes en señales con estructura periódica.

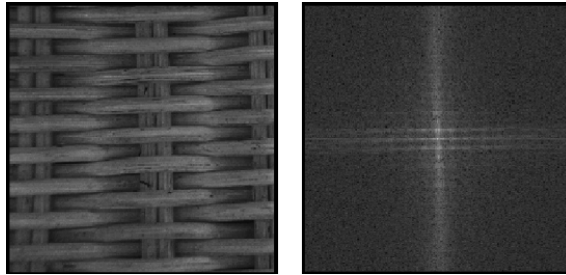


Figura 23: (a) Imagen "mimbre". (b) El módulo de su DFT.

Una de las ventajas del uso de la transformada de *Fourier* en el procesado de las imágenes, es poder aplicar el teorema de la convolución que se describe en la ecuación (26).

Sea $g(x, y)$ una imagen formada por la convolución de un imagen $f(x, y)$ y un filtro invariante de posición $h(x, y)$, entonces se cumple que:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \iff G(u, v) = F(u, v)H(u, v) \quad (26)$$

siendo G , F y H la transformada de *Fourier* de g , f y h respectivamente.

Dicho teorema es la base fundamental de las técnicas de filtrado en el dominio frecuencial, por el que, tal y como se introdujo en la sección 2, la operación de la convolución de un imagen $f(x, y)$ y un filtro $h(x, y)$, se transforma en la sencilla operación del producto de la imagen transformada $F(u, v)$ con el filtro $H(u, v)$.

Por tanto, el proceso de filtrado en el dominio de la frecuencia consistirá en los siguientes pasos:

1. Calcular $F(u, v)$, la DFT de la imagen original.
2. Multiplicar $F(u, v)$ por la función de transferencia del filtro $H(u, v)$.
3. Calcular la transformada inversa del resultado del paso 2.
4. Obtener la parte real del resultado en 3.

Además, como el objetivo es dejar pasar únicamente un determinado grupo de frecuencias (bajas, medias o altas), y eliminar el resto, es francamente sencillo diseñar la función $H(u, v)$ simplemente anulando las componentes que se desean eliminar, y haciendo que tome el valor 1 en el resto.

La figura 24a muestra un ejemplo de los filtros que suavizan la imagen, estos se denominan paso-bajo. Su función es eliminar las altas frecuencias y dejar pasar las bajas, con el objetivo de eliminar el ruido a costa de perder cierta nitidez en la imagen.

Por el contrario, los filtros que realzan los bordes eliminando las bajas frecuencias y dejando pasar las altas, como el de la figura 24b, son conocidos como paso-alto. Son utilizados en la detección de patrones o para resaltar detalles finos de una imagen.

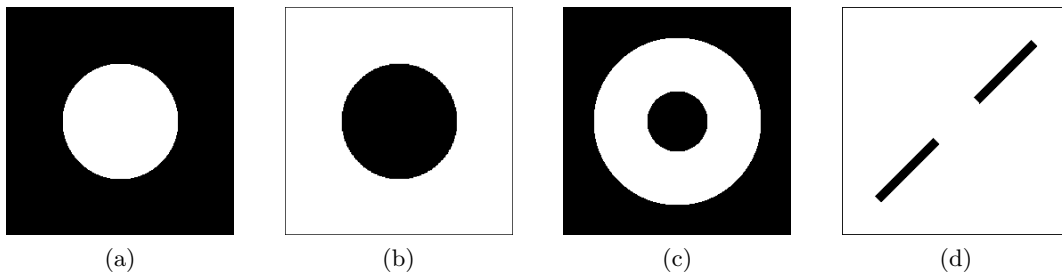


Figura 24: Filtros en frecuencia. (a) Paso-bajo. (b) Paso-alto. (c) Paso-banda. (d) Muesca.

Sin embargo, se pueden hacer filtros más complejos que permitan dejar intacto un determinado rango de frecuencia como el de la figura 24c (paso-banda). Son útiles para aislar los efectos de ciertas bandas de frecuencias ayudando a simplificar el análisis del ruido, el cual es independiente del contenido de la imagen.

También es posible diseñar filtros que eliminen la frecuencia en determinadas direcciones espaciales, conocidos como filtros de muesca o *notch filter* (figura 24d). Muy útiles para eliminar patrones de interferencia que degradan la imagen en una determinada dirección.

Por último, se mostrarán las expresiones de los filtros paso-bajo y paso-alto ideales, a partir de los cuales se pueden diseñar cualquier filtro digital.

- **Filtro paso-bajo:**

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \leq \Omega_c \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (27)$$

- **Filtro paso-alto:**

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{si } \sqrt{u^2 + v^2} \geq \Omega_c \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (28)$$

3 Técnicas de restauración

Las imágenes digitales capturadas por las cámaras fotográficas y las videocámaras, incluso las de alta calidad, por lo general están degradadas por una cierta cantidad de ruido y desenfoque.

El ruido se produce en las imágenes por múltiples razones, entendiendo por ruido las variaciones estocásticas en contraposición a las variaciones deterministas debidas, entre otros motivos, al desenfoque o la falta de contraste.

Por ejemplo, los sensores CCD (*charge-coupled device*) de las cámaras fotográficas y vídeo digital, son dispositivos contadores de fotones, es decir, cuentan fotones para producir electrones, comúnmente conocidos como fotoelectrones. Como el número de fotones contados es una cantidad al azar, las imágenes tienden a menudo a sufrir "*photon counting noise*", especialmente en situaciones de poca luz. Este ruido se suele modelar como una distribución de *Poisson*, aunque bajo determinadas condiciones, a menudo razonables, se puede modelar como ruido gaussiano.

Muchas imágenes son dañadas por el ruido "*salt & pepper*" al ser transmitidas por enlaces digitales ruidosos. Su efecto es similar al de espolvorear puntos negros y blancos en la imagen. Aunque sólo unos pocos píxeles son ruidosos, éstos son muy dañinos visualmente.

El ruido de "*speckle*" es uno de los modelos de ruido más complejos de la imagen ya que no se puede modelar con una distribución gaussiana y además es espacialmente dependiente. Se produce en situaciones de luz coherente o debido a los efectos atmosféricos sufridos por la luz estelar al entrar en contacto con la tierra.

Otros ruidos conocidos son el ruido del grano en películas fotográficas, que a veces también se modela como *Gauss* y otras como de *Poisson*; y el ruido de cuantificación inherente en el proceso de cuantificación de amplitud que se produce en el conversor analógico-digital.

Por otro lado, las causas más comunes de desenfoque son debidas a un sistema óptico que está fuera de foco, a la turbulencia atmosférica y al movimiento relativo entre la cámara y la escena original. Estos desenfoques no se limitan sólo a las imágenes ópticas, así por ejemplo, la radiación dispersa de los rayos-X produce borrosidad y pérdida de contraste en las radiografías, o las micrografías electrónicas pueden estar dañadas por las aberraciones esféricas de las lentes de electrones.

Además, si para aumentar la resolución de la imagen entran en juego las técnicas de superresolución, la restauración cobra especial importancia debido a que la falta de definición y el ruido pueden llegar a ser bastante desagradables, incluso si previamente no se percibieran por el ojo humano. Hay que entender que en los algoritmos de superresolución se intenta, a partir de diferentes imágenes tomadas de la misma escena, combinar la información existente para intentar distinguir detalles que antes no se podían apreciar en las imágenes originales. No como en las técnicas tradicionales de escalado de imagen, en las que sólo se utiliza una imagen para el aumento de resolución, y únicamente se intenta evitar el efecto de "pixelado" en los bordes.

El objetivo de la restauración digital consiste en estimar cada imagen tal y como sería sin ningún tipo de degradación. Esto se trata de conseguir mediante el modelado del

sistema que deteriora la imagen, y la aplicación posterior de un procedimiento inverso. Ésta es la principal diferencia respecto a las técnicas del realce de imagen descritas en el apartado 2, las cuales están diseñadas para producir resultados más agradables para un observador, al manipular la imagen mediante un filtrado que elimine el ruido o aumente la nitidez de la misma, sin hacer uso de modelos de degradación particulares para cada caso.

En el campo de la restauración de la imagen o "*image deblurring*", se supone que se conocen *a priori* las características del sistema degradante; sin embargo, en situaciones prácticas puede no ser así, es decir, que no sea posible obtener esta información directamente en el proceso de formación de la imagen. En estos casos se hace necesario identificar o estimar las propiedades del sistema a partir de la imagen ya degradada antes del proceso de restauración. A la combinación de ambos, la identificación del desenfoque y el proceso de restauración, se le conoce como "*deconvolución ciega de la imagen*" o "*blind image deconvolution*".

Para los métodos de restauración de imágenes que se describen en el proyecto, se supone que el sistema es lineal e invariante en el espacio, aunque si se quiere ahondar en el tema de métodos más complejos que consideran sistemas que no sean invariantes, existe bastante documentación al respecto, siendo algunos ejemplos de ello.

Por lo tanto, se considerará el sistema de degradación de la imagen, comúnmente conocido por su término en inglés "*point spread function*" (PSF), como un núcleo de convolución que no varía en el espacio. Además, también se supone que las propiedades estadísticas de la imagen y el ruido (la media y la función de correlación) también son invariantes.

Bajo estas condiciones, el proceso de restauración puede llevarse a cabo por medio de un filtro $h(n_1, n_2)$ lineal e invariante en el espacio, es decir, que es constante en toda la imagen. Este modelo puede ser formulado matemáticamente tal y como se muestra en la ecuación (29). Considerando $f(n_1, n_2)$ como la imagen ideal que no contiene ruido y tampoco desenfoque, y a $g(n_1, n_2)$ la imagen capturada (véase también la figura 25a).

$$\begin{aligned} g(n_1, n_2) &= f(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) + w(n_1, n_2) \\ &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{M-1} h(k_1, k_2) f(n_1 - k_1, n_2 - k_2) + w(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (29)$$

Aquí $w(n_1, n_2)$ es el ruido que corrompe la imagen borrosa. Típicamente se considera como un término aditivo que tiene media cero y sus componentes no guardan correlación entre sí, es decir, ruido blanco, y por tanto su densidad espectral de potencia es constante. En términos estadísticos esto se puede expresar como se indica en las expresiones (30) y (31), siendo E la esperanza matemática y R_w la autocorrelación.

$$E[w(n_1, n_2)] \approx \frac{1}{MN} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{M-1} w(k_1, k_2) = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} R_w(k_1, k_2) &= E[w(n_1, n_2)w(n_1 - k_1, n_2 - k_2)] \\ &\approx \frac{1}{MN} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{M-1} w(n_1, n_2)w(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = \begin{cases} \sigma^2, & \text{si } k_1 = k_2 = 0 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

En la práctica, la representación espectral es más utilizada, ya que da lugar a una implementación más sencilla de los filtros. Mediante la transformada de Fourier, la ecuación (29) se transforma en la siguiente expresión (32) (véase también la figura 25b).

$$G(u, v) = F(u, v) \cdot H(u, v) + W(u, v) \quad (32)$$

Es evidente que el objetivo de la restauración de la imagen es hacer una estimación de la imagen ideal $f(n_1, n_2)$, teniendo en cuenta sólo la imagen degradada $g(n_1, n_2)$, la función de desenfoque $h(n_1, n_2)$, y alguna información sobre las propiedades estadísticas de la imagen ideal y el ruido.

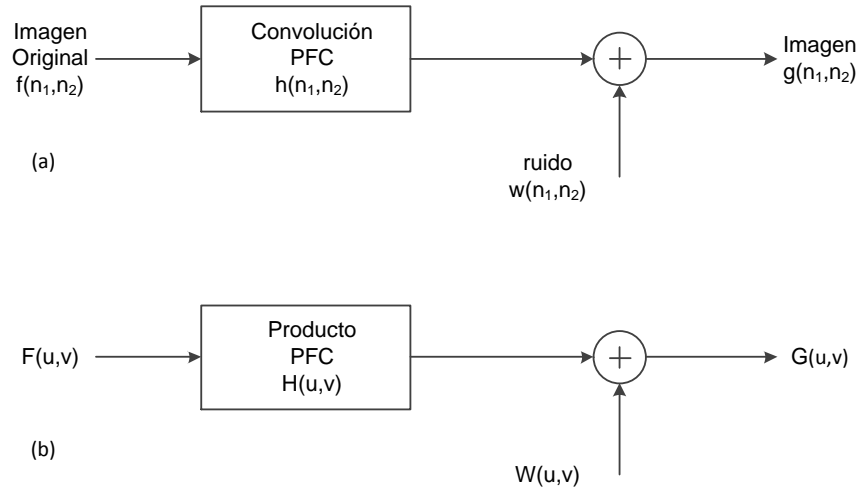


Figura 25: Formación de una imagen. (a) En el dominio espacial. (b) En el dominio de la frecuencia.

Estos modelos (29), (32) establecen las bases para la restauración de la imagen en el caso de sistemas lineales e invariantes en el espacio. Aunque estos modelos están definidos para imágenes monocromáticas, se pueden extender al caso de las imágenes en color, y para ello se pueden tomar dos enfoques.

Dado que las degradaciones sufridas por los diferentes canales de color pueden no ser independiente entre sí, un primer método consiste en ampliar las ecuaciones (29), (32) para incorporar múltiples componentes de color, como pueden ser los colores rojo-verde-azul o el caso de luminosidad-tono-saturación o por último, luminancia-crominancia. Esto conduce a una clase de algoritmos conocidos como "‘*multichannel filters*’".

Una segunda opción y más práctica, es suponer que los efectos de la degradación son independientes en cada uno de los componentes de color. La restauración de los componentes de color se puede llevar a cabo por separado, lo que significa que cada componente de color es considerado como una imagen monocromática, olvidando al resto de los componentes de color. Aunque evidentemente este modelo podría dar lugar a errores, en la mayoría de los casos han dado resultados aceptables.

A continuación, en la sección 3.1, se explicarán los modelos de desenfoque lineal que ya se introdujeron al principio de este apartado, conocidos por su expresión inglesa, "‘*linear*’".

motion blur”, ”*out-of-focus blur*”, y ”*atmospheric turbulence blur*”. En la Sección 3.2 se describen en detalle una serie de algoritmos de restauración bastante conocidos, que se podrían englobar en: ”el filtro inverso”, ”los filtros por mínimos cuadrados como el de *Wiener*”, y ”los filtros iterativos de restauración”. Por último, en la sección 3.3 se comentarán brevemente los métodos básicos para la identificación de los parámetros de los modelos de desenfoque ”*linear motion blur*” y ”*out-of-focus blur*”.

3.1 Modelos de desenfoque (PSF).

Como ya se ha introducido anteriormente, los modelos que se describen a continuación son lineales e invariantes en el espacio, es decir, la imagen se emborrona de la misma forma en todos sus puntos. A diferencia de otros modelos que no cumplen esta hipótesis como por ejemplo, el desenfoque debido a la rotación de la escena que se produce al girar unas ruedas o a distorsiones locales como el que sucede cuando una persona queda desenfocada al moverse mientras que el fondo se mantiene enfocado.

3.1.1 Linear Motion Blur

El desenfoque por el movimiento relativo entre el dispositivo de grabación y la escena puede ser debido a múltiples causas. Las más comunes son por una traslación, una rotación, un cambio repentino de escala, o alguna combinación de las anteriores.

Si sólo se considera el movimiento debido a la traslación relativa entre la cámara y la escena, a una velocidad constante v_{ref} , con una dirección marcada por el ángulo ϕ , y durante un tiempo t_{exp} , se puede determinar la ”longitud del movimiento” como $L = v_{ref} \cdot t_{exp}$. En este caso se puede definir el PSF con la expresión (33).

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{L}{2}; \frac{y}{x} = \phi \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (33)$$

La figura 26a muestra el módulo de la transformada de Fourier del PSF del desenfoque por movimiento con $L = 7,5$ y $\phi = 0$. Se puede comprobar como el efecto de emborronar la imagen tiene la forma de un filtro paso-bajo, con un patrón de ceros a lo largo del eje de la dirección del movimiento. El espaciado entre estos nulos es aproximadamente igual a N/L , siendo N el número de columnas de la imagen.

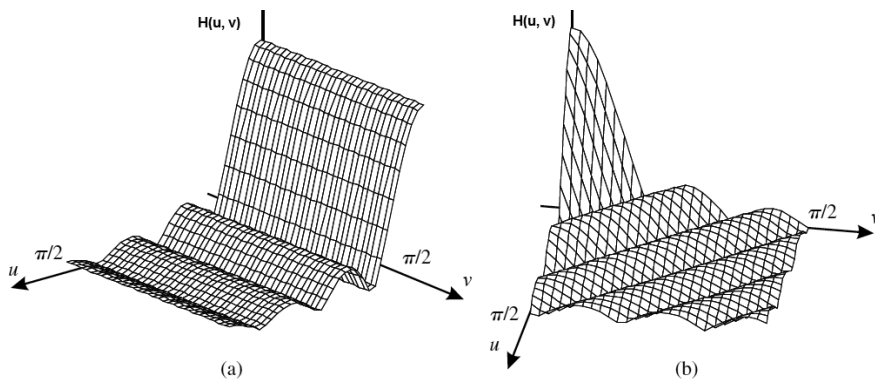


Figura 26: Espectro del desenfoque por movimiento. (a) Con $L = 7,5$ y $\phi = 0$. (b) Con $L = 7,5$ y $\phi = \pi/4$.

En la figura 26b se muestra también el módulo de la transformada de Fourier del PSF del desenfoque por movimiento, pero en esta ocasión el ángulo $\phi = \pi/4$.

3.1.2 Uniform Out-of-Focus Blur

En óptica es frecuente el empleo del término círculo de confusión (COC) para determinar la profundidad de campo. En general, el COC define cuánto ha de estar un punto fuera de foco para ser percibido por un ser humano con capacidad visual normal. En este momento se dice entonces que esa región de la imagen está fuera de la profundidad de campo, o no tiene una nitidez aceptable.

El grado de desenfoque (diámetro del COC) depende de la distancia focal, la apertura de la lente y la distancia entre la cámara y el objeto. Un modelo preciso no sólo describe el diámetro del COC, sino también la distribución de intensidad dentro del COC.

Sin embargo, si el grado de desenfoque es grande en relación a las longitudes de onda consideradas, un enfoque geométrico puede ser aceptable, resultando una distribución de intensidad uniforme dentro del COC. Entonces, el PSF del "out-of-focus blur" de radio R viene dado por la expresión (34).

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (34)$$

En la figura 27b se presenta el espectro del PSF "out-of-focus blur" con $R = 2,5$. De nuevo posee un comportamiento paso bajo, pudiéndose observar, en este caso tanto horizontal como verticalmente, el patrón característico de ceros espectrales.

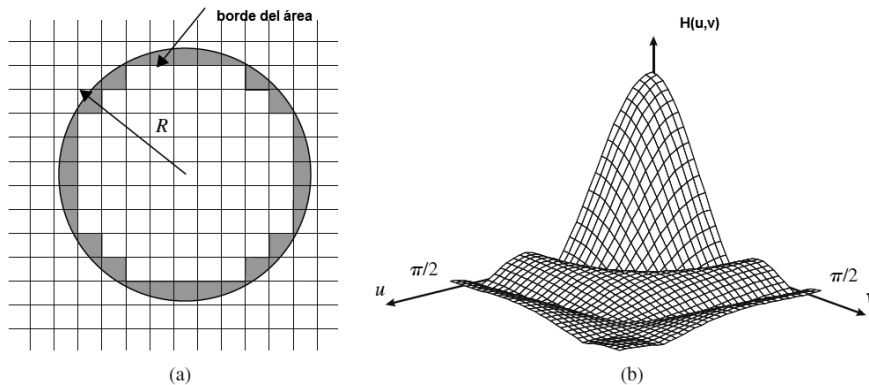


Figura 27: (a) Elementos del borde del PSF "out-of-focus blur". (b) Módulo del espectro del PSF "out-of-focus blur" $R = 2,5$.

Sin embargo, en el caso discreto esta aproximación no es del todo correcta en el borde del círculo, ya que los píxeles son cuadrados. Un modelo más exacto para los elementos del borde implicaría la integración de toda esta zona, como se ilustra en la figura 27a.

3.1.3 Atmospheric Turbulence Blur

Los efectos producidos por las turbulencias atmosféricas provocan una grave limitación en la teledetección por satélite. El efecto borroso introducido depende de una gran variedad de factores, tales como, la temperatura, la velocidad del viento y el tiempo de exposición, aunque si el tiempo de exposición es suficientemente prolongado, el PSF se puede describir

razonablemente bien por una función de *Gauss* como la de la ecuación (35), donde σ_G determina la cantidad de difusión del desenfoco.

$$h(x, y) = C \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_G^2}\right) \quad (35)$$

Hay que destacar que en esta ocasión el espectro del PSF no tiene el patrón de ceros, tal y como se puede ver en la figura 28.

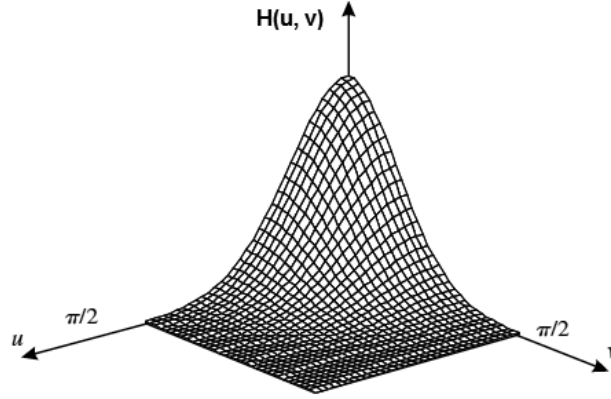


Figura 28: Módulo del espectro del PSF "Atmospheric Turbulence Blur" $\sigma_G = 1, 2$.

3.2 Algoritmos de restauración de imagen

Como ya se ha comentado anteriormente, con los métodos de restauración de imagen se busca la estimación de una imagen ideal sin imperfecciones $\hat{f}(n, n_2)$, a partir de la imagen degradada $g(n, n_2)$. Para ello se supondrá que la función de desenfoco (PSF) es conocida *a priori*, y por lo tanto una vez diseñado el filtro de restauración, la imagen restaurada vendrá dada por la expresión (36).

$$\begin{aligned} \hat{f}(n, n_2) &= g(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) \\ &= \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{M-1} h(k_1, k_2) g(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \end{aligned} \quad (36)$$

O por su versión en el dominio de la frecuencia (37)

$$\hat{F}(u, v) = G(u, v) \cdot H(u, v) \quad (37)$$

Aunque existen técnicas que utilizan la información de varias imágenes desenfocadas para tratar de reconstruir la imagen original, este capítulo se centrará exclusivamente en los algoritmos que necesitan únicamente una imagen deteriorada y unos conocimientos previos que caractericen el sistema de degradación PSF. Por lo tanto, el objetivo de los algoritmos que a continuación se van a explicar será el diseño del filtro $H(u, v)$.

3.2.1 Filtro inverso

Se entiende por filtro inverso h_{inv} , a aquél que es el inverso de la función de desenfoco h_{PSF} , y por lo tanto cumple la ecuación (38).

$$\begin{aligned}
h_{inv}(n_1, n_2) * h_{PSF}(n_1, n_2) &= \delta(n_1, n_2) \\
H_{inv}(u, v) \cdot H_{PSF}(u, v) &= 1 \Rightarrow H_{inv}(u, v) = \frac{1}{H_{PSF}(u, v)}
\end{aligned} \tag{38}$$

Como se puede intuir, la reconstrucción se llevará a cabo en el dominio espectral, y bastará sustituir la (38) en la ecuación (37):

$$\begin{aligned}
\hat{F}(u, v) &= H_{inv}(u, v) \cdot G(u, v) = \frac{1}{H_{inv}(u, v)} (F(u, v) \cdot H(u, v) + W(u, v)) \\
&= F(u, v) + \frac{W(u, v)}{H_{inv}(u, v)}
\end{aligned} \tag{39}$$

En ausencia de ruido, el segundo término " $\frac{W(u, v)}{H_{inv}(u, v)}$ " desaparece, y por tanto, la imagen restaurada es idéntica a la imagen ideal.

La principal ventaja de este filtro es su simplicidad, ya que *a priori* sólo requiere conocer el PSF; sin embargo, existen una serie inconvenientes al usar este filtro, a saber:

El filtro inverso puede no estar definido en aquellas frecuencias que anulan el $H_{PSF}(u, v)$, tal y como ocurría en los desenfoques "*linear motion blur*" y "*out-of-focus blur*". Este inconveniente se puede minimizar en cierta medida eliminando los puntos que provocan inestabilidad en el sistema, utilizando el filtro conocido como "*pseudoinverso*". Esto es posible debido a que los ceros están localizados en unos pocos puntos del plano (u, v) , y por tanto, se pueden eliminar fácilmente del cálculo en la ecuación (39) sin afectar al resultado final.

Sin embargo, al haber ruido, aunque $H_{PSF}(u, v)$ no fuera cero pero tuviera valores pequeños, el término " $\frac{W(u, v)}{H_{inv}(u, v)}$ " puede llegar a dominar en la estimación de $\hat{F}(u, v)$, al resultar el ruido fuertemente amplificado, y estropeando el resultado final. Una posible solución es limitar el filtro a un entorno de frecuencias cercanas al origen, eliminando en la medida de lo posible el encontrar valores cercanos a cero.

3.2.2 Filtros por mínimos cuadrados

Para evitar la excesiva sensibilidad al ruido del filtro inverso, han sido desarrollados una serie de filtros de restauración que se denominan comúnmente como "*Least-Squares Filters*".

Los más conocidos son el filtro de "*Wiener*" y el "filtro por mínimos cuadrados con restricciones", también conocido como "*constrained least-squares filter*", que si bien ambos llegan a una solución similar, la base teórica que hay por detrás es muy distinta.

- **Filtro de Wiener:**

Este método supone que la función de degradación y el ruido son variables aleatorias, y su objetivo es encontrar una estimación de \hat{f} que minimice el error cuadrático medio entre ella y la imagen original.

$$error = E\{(f^2 - \hat{f}^2)\} \tag{40}$$

Considerando que el ruido y la imagen están incorrelados, el mínimo de la función de error indicada en (40), se obtiene en la ecuación (41), la cual viene expresada en el dominio de la frecuencia.

$$\begin{aligned}
\hat{F}(u, v) &= \left[\frac{H^*(u, v)S_f(u, v)}{S_f(u, v)|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)} \right] G(u, v) \\
&= \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} \right] G(u, v) \\
&= \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + S_\eta(u, v)/S_f(u, v)} \right] G(u, v)
\end{aligned} \tag{41}$$

Donde:

- $H(u, v) \equiv$ Filtro del PSF.
- $H^*(u, v) \equiv$ Complejo conjugado de $H(u, v)$.
- $|H(u, v)|^2 \equiv H^*(u, v)H(u, v)$.
- $S_f(u, v) \equiv$ Potencia espectral de la imagen sin degradar ($|F(u, v)|^2$).
- $S_\eta(u, v) \equiv$ Potencia espectral de de ruido ($|W(u, v)|^2$).

El resultado obtenido en (41) es conocido como "filtro de *Wiener*" en honor a *N. Wiener*, quien fue el primero en proponer este planteamiento en 1942.

Se puede observar que se evita el problema de los ceros espectrales del PSF, pues es improbable que el denominador completo sea cero para algún determinado valor de las frecuencias u y v .

Según el término $S_\eta(u, v)/S_f(u, v)$, el filtro será equivalente al filtro pseudoinverso cuando la densidad espectral de potencia del ruido es baja, es decir, $H_{wiener} = 1/H$ si $H \neq 0$, y 0 en caso contrario. Por otro lado, si es un valor alto, se comportará como un filtro paso bajo que eliminará el ruido.

Como desventaja, existe el problema de la necesidad de estimar la cantidad de ruido existente y de conocer *a priori* la densidad espectral de potencia de la imagen sin degradar. Si bien el ruido se puede modelar como ruido blanco gaussiano, y por lo tanto, la estimación de $|W(u, v)|^2$ se simplifica bastante al ser una constante, se mantiene la cuestión de que en la mayoría de los casos prácticos, la imagen sin degradar es desconocida. Para ello se suele emplear la aproximación que se muestra en (42), donde K es un parámetro ajustable que se emplea para evitar tener que conocer $S_f(u, v)$.

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} \right] G(u, v) \tag{42}$$

Otra opción consiste en estimar la densidad espectral de potencia de la imagen degradada y compensarla mediante la varianza del ruido, siguiendo la ecuación (43).

$$S_f(u, v) \approx S_g(u, v) - \sigma_w^2 \approx \frac{1}{MN} G^*(u, v)G(u, v) - \sigma_w^2 \tag{43}$$

Por último, se puede utilizar un modelo estadístico para la imagen ideal. A menudo, estos modelos incorporan parámetros que pueden ajustarse a la imagen real que se utiliza. Una opción ampliamente utilizada, no sólo en la restauración de la imagen, sino también en su compresión, es el siguiente modelo 2-D autorregresivo y causal:

$$f(n_1, n_2) = a_{0,1}f(n_1, n_2 - 1) + a_{1,1}f(n_1 - 1, n_2 - 1) + a_{1,0}f(n_1 - 1, n_2) + \sigma_w^2 \quad (44)$$

En este modelo, las intensidades de los píxeles de la imagen se describen como la suma ponderada de los valores de los píxeles vecinos y una componente aleatoria, que a menudo se modela como ruido blanco con varianza σ_w^2 . Una vez que los parámetros del modelo se han elegido, se puede calcular la densidad espectral de potencia como:

$$S_f(u, v) = \frac{\sigma_w^2}{|a_{0,1}e^{-ju} + a_{1,1}e^{-ju-jv} + a_{1,0}e^{-jv}|^2} \quad (45)$$

- **Filtro por mínimos cuadrados con restricciones:**

Otro enfoque para superar las limitaciones de los filtros anteriores, el filtro inverso (amplificación del ruido) y el filtro de *Wiener* (estimar la potencia de la imagen sin degradar), es utilizar el "‘constrained least-squares filter’".

Aunque sigue siendo imprescindible conocer la función de degradación PSF, en este método tan sólo es necesario saber además la media y varianza del ruido, parámetros que se pueden estimar fácilmente de la imagen degradada, lo cual es una gran ventaja a favor de esta técnica.

Teniendo en cuenta que si la restauración es buena, la imagen restaurada tras pasar por el filtro PSF debería ser igual a la imagen degradada original, salvo una cierta cantidad de ruido (46).

$$\begin{aligned} g(n_1, n_2) &= f(n_1, n_2) * h_{PSF}(n_1, n_2) + w(n_1, n_2) \\ \hat{f}(n_1, n_2) &= g(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) \\ g(n_1, n_2) &\approx \hat{f}(n_1, n_2) * h_{PSF}(n_1, n_2) \end{aligned} \quad (46)$$

Por lo tanto, es lógico pensar que se satisfaga la igualdad de la ecuación (47).

$$\|g(n_1, n_2) - \hat{f}(n_1, n_2) * h_{PSF}(n_1, n_2)\|^2 \approx \sigma_w^2 \quad (47)$$

El objetivo de esta técnica es encontrar la solución óptima que dé el menor valor posible a σ_w^2 , minimizando por tanto, la ecuación (47). Considerando el hecho de que el filtro inverso tiende a amplificar el ruido, un criterio para la optimización de este proceso, es utilizar un patrón en función de la "‘suavidad’" o "‘smoothness’" de la imagen restaurada. Para ello, es frecuente utilizar como medida un filtro paso alto $C(n_1, n_2)$, como puede ser el laplaciano, y así obtener información sobre el contenido de alta frecuencia de la imagen restaurada, es decir, el ruido.

Así, lo que se desea es encontrar el mínimo de la función C definida como:

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2 \quad (48)$$

sujeta a la restricción de la ecuación (49).

$$\|G - H\hat{F}\|^2 \approx \|\eta\|^2 \quad (49)$$

La solución en el dominio espectral a este problema de optimización, viene dada por la ecuación (50).

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{|H(u, v)|^*}{|H(u, v)|^2 + \alpha|C(u, v)|^2} \right] G(u, v) \quad (50)$$

Donde α es el parámetro que se debe ajustar para que se cumpla la restricción de la (49), y $C(u, v)$ es la transformada de *Fourier* de la máscara del laplaciano de la ecuación (51).

$$c(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Como ya se introdujo al principio, salta a la vista la gran similitud existente entre las ecuaciones (50) y (42). Nuevamente, en se puede encontrar un desarrollo más detallado de este filtro.

3.2.3 Filtros iterativos de restauración

Como ya se ha dicho en varias ocasiones, los filtros formulados en las apartados anteriores se suelen realizar en el dominio de la frecuencia, dado que de esa manera se permite no utilizar directamente la convolución. Sin embargo, existen ocasiones en las que no es posible trabajar en el dominio espectral, como por ejemplo, cuando el tamaño de las imágenes es excesivamente grande.

Se ha demostrado en numerosos artículos, que en estos casos los procedimientos iterativos pueden ser especialmente eficaces, sobre todo cuando el conocimiento previo acerca de la imagen está disponible en forma de restricciones, cuando la función de desenfoque es aproximadamente estimada, cuando se elige variar el grado de desenfoque y eliminación de ruido en función de la información local de la imagen, e incluso si se trata de funciones variantes en el espacio.

A diferencia de los métodos directos explicados hasta ahora, los métodos iterativos asumen previamente una imagen ideal inicial y un modelo conocido de PSF, y en cada iteración, la imagen y los parámetros del desenfoque se vuelven a estimar para utilizarse en la siguiente etapa.

Aunque existen diferentes algoritmos iterativos, la forma básica de estos filtros de restauración de una iteración i , viene expresada en el dominio espacial tal y como se muestra en la ecuación (52). Tiene la peculiaridad de que si el número de iteraciones es suficientemente grande, la forma del filtro tiende a la solución del filtro inverso.

$$\hat{f}_{i+1}(n_1, n_2) = \hat{f}_i(n_1, n_2) - \beta(g(n_1, n_2) - h(n_1, n_2) * \hat{f}_i(n_1, n_2)) \quad (52)$$

Entre las múltiples ventajas que poseen estos métodos, se pueden destacar:

- La convolución sólo es de la imagen restaurada con el PSF del desenfoque, que tiene relativamente pocos coeficientes.
- Al no necesitar la transformada de *Fourier*, se puede aplicar a imágenes con un tamaño arbitrario.

- No amplifica en exceso el ruido, tal y como ocurría con el filtro inverso, pues la iteración se puede parar cuando el resultado sea aceptable, sin necesidad de alcanzar el caso límite.
- Se puede extender fácilmente para el caso de la restauración en sistemas variantes en el espacio.

Por contra, una desventaja muy importante de las iteraciones es su lenta convergencia, debido a que por cada iteración, la imagen restaurada $\hat{f}_{i+1}(n_1, n_2)$, sólo cambia un poco. Por lo tanto, se requieren bastantes pasos antes alcanzar un punto aceptable para terminar con el proceso.

La razón es que se trata esencialmente de un algoritmo del tipo "steepest descent optimization", el cual tiene una convergencia lenta. Para evitarlo, es posible transformar las iteraciones para convertir las en un algoritmo de tipo "gradiente conjugado", que posee una velocidad de convergencia mucho mayor.

3.3 Algoritmos de identificación del desenfoque

Como ya se introdujo al principio del apartado 3, los algoritmos de restauración de la imagen suelen ir precedidos por una etapa de identificación de la función de degradación de la imagen.

El primer paso será la elección de algún modelo paramétrico del PSF. En general se suelen utilizar alguno de los modelos expuestos en el apartado 3.1, aunque Rob Fergus *et al.*, en su artículo "Removing Camera Shake from a Single Photograph", introducen un algoritmo para identificar y restaurar imágenes desenfocadas sin ningún conocimiento *a priori* del *kernel* responsable del desenfoque.

Por lo tanto, en esta etapa se buscará algún parámetro en la imagen ya degradada, que caracterice el PSF. Por ejemplo, en caso de tratarse de desenfoque por movimiento relativo, el parámetro a encontrar sería la longitud L del movimiento.

Otro enfoque para categorizar al PSF consiste en describir el desenfoque como un conjunto de coeficientes previamente definidos. Por ejemplo, si se detecta que el desenfoque es debido a estar "fuera de foco", pero no se ha podido estimar el radio del COC, y por lo tanto, no se puede describir en función de la ecuación (34), se podría modelar a través de una matriz 3×3 , dando sus 9 coeficientes por defecto.

Este apartado se centrará en la primera categoría, exponiendo posibles algoritmos para la identificación de los parámetros de los desenfoques debidos a "linear motion blur" y "out-of-focus blur".

3.3.1 Estimación a partir del espectro del PSF

Como ya se adelantó en el apartado 3.1, la forma del espectro de estos desenfoques es muy característica, de tal forma que posee un patrón de ceros que anula la función periódicamente.

Si el módulo de la transformada de *Fourier* del PSF tiene un patrón que contiene líneas paralelas de ceros, tal y como se muestra en la figura 29a, se puede afirmar que la imagen está degradada por un "linear motion blur", cuya dirección es perpendicular a dichas rectas, y la longitud $L = N/d$. Donde N es el n° de puntos de la transformada discreta de *Fourier* y d la distancia desde el origen al primer nulo, entendiendo como origen la posición del centro de la imagen.

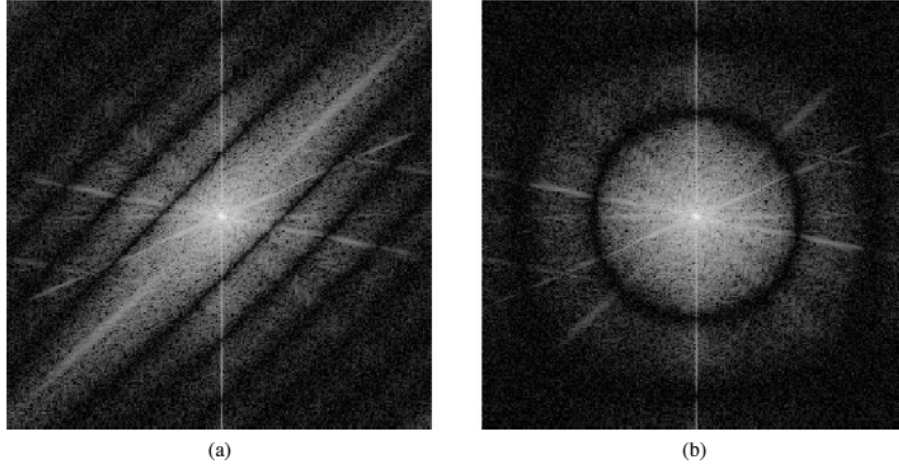


Figura 29: (a) M3dulo del espectro de una imagen desenfocada. "linear motion blur". (b) "out-of-focus blur".

Mientras que si el patr3n existente son c3rculos conc3ntricos, tal y como ocurre en la figura 29b, se puede deducir que se trata del caso de "out-of-focus blur", y el grado de desenfoco, es decir, el radio de COC, puede ser estimado.

3.3.2 Estimaci3n a partir del "cepstrum" del PSF

Se conoce como "cepstrum" a la transformada inversa de *Fourier* del logaritmo del m3dulo $-|G(u, v)|$.

$$\tilde{g}(n_1, n_2) = -TF^{-1}\{\log |G(u, v)|\} \quad (53)$$

Si la imagen est3 degradada con alg3n tipo de desenfoco, al representar el *cepstrum* ocurrir3 algo similar al caso anterior pero con peque1as diferencias:

- "Linear motion blur": el *cepstrum* tendr3 un patr3n de puntos m3ximos, tal y como se muestra en la figura 30a. En esta ocasi3n la longitud del desplazamiento L se puede estimar directamente a partir de la distancia eucl3dea entre el origen y la posici3n del m3ximo ($L = \sqrt{x^2 + y^2}$). La direcci3n, o 3ngulo ϕ , ser3 la direcci3n de la l3nea imaginaria que une los m3ximos. En el caso de la figura 30a, la direcci3n es horizontal.
- "Out-of-focus blur": el *cepstrum* tendr3 un patr3n de c3rculos de valor m3ximo, tal y como se muestra en la figura 30b, cuyo radio es proporcional al grado de desenfoco.

3.3.3 Estimaci3n a partir de la "autocorrelaci3n" del PSF

Y. Yitzhaky y N. S. Kopeika proponen en su art3culo "Identification of Blur Parameters from Motion Blurred Images" un algoritmo para estimar las caracter3sticas del desenfoco causado por "linear motion blur". La direcci3n, longitud y la estimaci3n de la forma del PSF se extraen de la imagen borrosa, aplicando las propiedades de las derivadas direccionales y la funci3n de autocorrelaci3n (ACF).

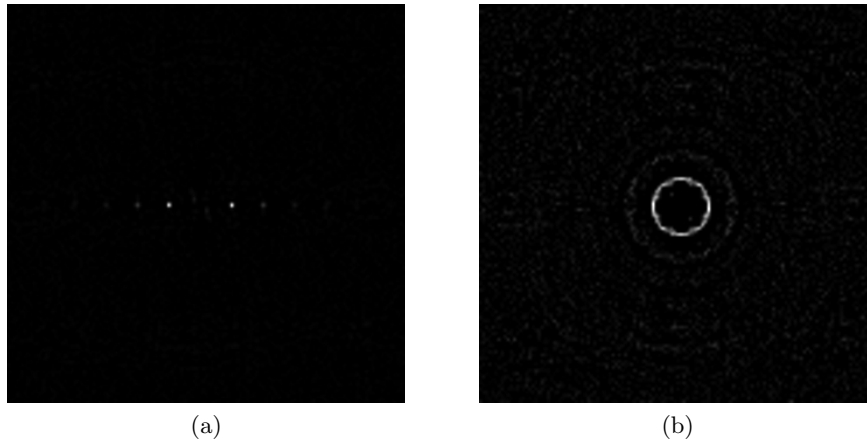


Figura 30: Módulo del cepstrum de una imagen desenfocada. (a) "linear motion blur". (b) "out-of-focus blur".

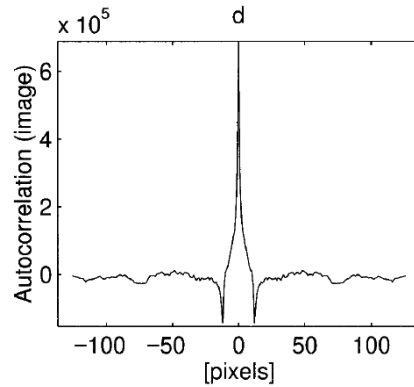


Figura 31: Autocorrelación de la derivada de una imagen con "linear motion blur".

Según su método, cuando la derivada de la imagen seguida por la operación de autocorrelación se lleva a cabo en la dirección del movimiento, se obtiene un mínimo en la ACF de la derivada de la imagen, a una distancia desde el centro, igual a la longitud del desenfoque, tal y como muestra la figura 31

Previamente se ha estimado la dirección del desplazamiento basándose en las propiedades de la derivada. Dado que las imágenes borrosas tienden a perder nitidez en la dirección del movimiento, y el efecto de la función de la derivada es similar a un filtro paso-alto que suprime las bajas frecuencias, cabe esperar que la intensidad media de la imagen derivada en la dirección del movimiento, sea menor que en el resto de direcciones.

3.3.4 Energía de las frecuencias altas

Similar al caso anterior, Xiaogang Chen en su artículo "Motion blur detection based on lowest directional high-frequency energy", introduce un novedoso método para detectar la dirección del movimiento basado en la derivada segunda de la imagen borrosa.

Nuevamente, se considera que la energía de las frecuencias altas disminuye de manera significativa a lo largo de la dirección del movimiento en la imagen borrosa. A diferencia

de los anteriores métodos, con éste se puede distinguir diferentes regiones de desenfoque, tal y como se muestra en la 32.



Figura 32: Imagenes con regiones de desenfoque.

3.3.5 Transformada de Radon

Joao P. A. Oliveira describe un método para estimar los parámetros del desenfoque por movimiento (dirección y longitud) directamente de la imagen observada.

En su artículo ”*Blind Estimation of Motion Blur Parameters For Image Deconvolution*” expone como se puede utilizar la transformada de *Radon*, definida por la ecuación (54), para estimar el ángulo y la longitud del movimiento.

$$\mathcal{R}_d(\phi, \rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) \delta(\rho - x \cos(\theta) - y \sin(\theta)) dx dy \quad (54)$$

Explica que la estimación de la dirección se calcula a partir del ángulo que produce un máximo de la \mathcal{R}_d . Y una vez que se ha estimado el ángulo, se puede calcular la longitud de manera similar al caso de utilizar el espectro del PSF, buscando los nulos de la transformada de *Radon* para esa dirección.

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \arg \max_{\theta} \text{var} \{ \mathcal{R}_d(\log|G(u, v)|, \rho, \theta) \} \\ \mathcal{R}_d(\log|G(u, v)|, \omega, \hat{\theta}) &\implies L \end{aligned} \quad (55)$$

Para dar por concluido este tema, señalar que estos conocimientos teóricos sobre el realce y la restauración de la imagen digital, constituyen la base para la realización del resto del proyecto.