

I. Fundamentos de la Transferencia Radiativa

El espectro Electromagnético.

Isaac Newton descubrió en el 1672 que la radiación electromagnética puede ser descompuesta en un espectro de sus componentes por un prisma u otros métodos. El espectro corresponde a ondas de diferentes longitudes de onda y frecuencias que se relacionan por $\lambda\nu = c$, donde ν es la frecuencia, λ es la longitud de onda y $c = 3.00 \times 10^{10}$ cm/s la velocidad de la luz en el vacío. Para ondas que no se estén propagando en el vacío c se convierte en la velocidad de la onda en el medio. En la figura 1.1 podemos ver los diferentes componentes del espectro electromagnético. El espectro se presenta en función de energía de los fotones, $E = h\nu$ y una temperatura $T = E/k$ para cada largo de onda. Donde h es la constante de Planck 6.625×10^{-27} ergs·s y k es la constante de Boltzmann, 1.38×10^{-16} ergs/K.

2 Fundamentals of Radiative Transfer

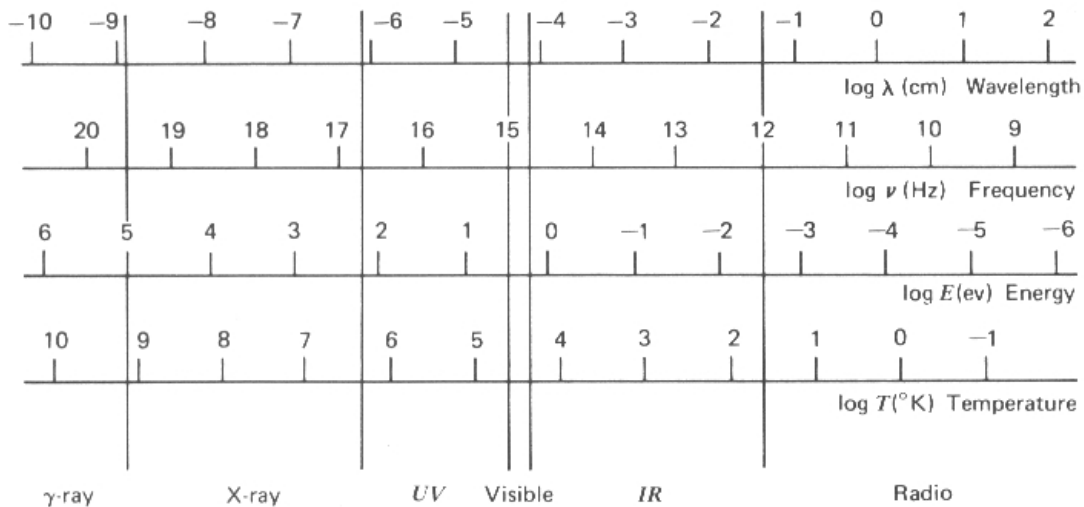


Figure 1.1 The electromagnetic spectrum.

1.2 El Flujo Radiativo

Cuando la escala del sistema es mucho más grande que la longitud de onda de la radiación (por ejemplo luz brillando sobre un agujero macroscópico),

podemos considerar que la radiación viaja en líneas rectas llamados rayos o hazes a través del espacio o un medio homogéneo. De esta definición podemos construir una teoría substancial sobre la propagación de la radiación, la teoría de transferencia de radiación. Uno de los primeros conceptos es el del flujo de energía. Consideremos un elemento de área dA expuesto a radiación por un intervalo de tiempo dt . La cantidad de energía pasando por el elemento de área debe ser proporcional a $dAdt$ y se representa como $FdAdt$. El flujo de energía F se mide usualmente en $\text{ergs s}^{-1} \text{cm}^{-2}$ (o en $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2}$ en el sistema métrico). Es importante notar que el flujo depende de la orientación del elemento dA .

El flujo de una fuente isotrópica. Una fuente es isotrópica si emite energía igualmente en todas las direcciones, por ejemplo un cuerpo esféricamente simétrico como una estrella aislada. Si imagináramos una superficie esférica S_1 y S alrededor de esta fuente a distancias r_1 y r , respectivamente, sabemos que como la energía se conserva entonces la energía total pasando a través de S_1 debe de ser igual a la que pasa por S (asumiendo que no hay pérdidas o ganancias de energía entre las superficies). Por lo tanto,

$$F(r_1) \cdot 4\pi r_1^2 = F(r) \cdot 4\pi r^2, \quad \text{o}$$

$$F(r) = \frac{F(r_1)r_1^2}{r^2}.$$

Si la superficie S_1 estuviese fija entonces,

$$F(r) = \frac{\text{constante}}{r^2},$$

lo cual es simplemente otra expresión para la conservación de energía.

1.3 La Intensidad Específica y sus Momentos

El flujo es una medida de la energía que acarrean todos los rayos fotones pasando a través de cierta área. Una descripción considerablemente mas detallada de la radiación requeriría describir la energía acarreada por rayos individuales. Pero, debemos realizar que un solo rayo acarrea esencialmente ninguna energía por lo que tenemos que considerar la energía acarreada por grupos de rayos, que difiere infinitesimalmente del rayo. La definición más apropiada entonces es: construir un área dA en dirección normal a un rayo

en particular y considera todos los rayos que pasen a través de dA cuya dirección esté dentro de cierto ángulo sólido $d\Omega$ del rayo, figura 1.2. La energía cruzando dA en un tiempo dt y en un rango de frecuencias $d\nu$ se define como:

$$dE = I_\nu dA \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu ,$$

donde I_ν es la intensidad específica o brillo. La intensidad específica tiene dimensiones de

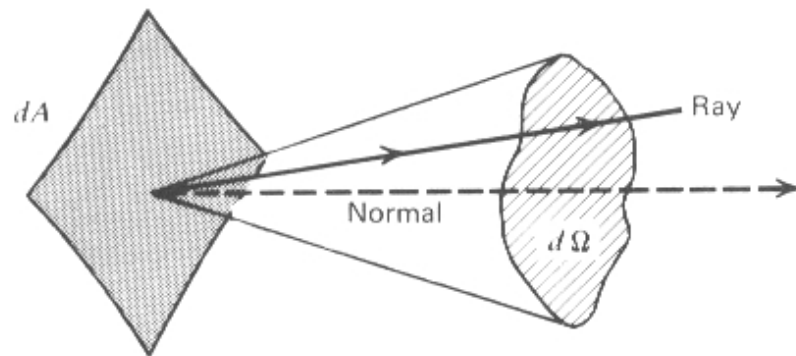


Figure 1.2 *Geometry for normally incident rays.*

$$\begin{aligned} I_\nu(\nu, \Omega) &= \text{energía (tiempo)}^{-1} (\text{área})^{-1} (\text{ángulo sólido})^{-1} (\text{frecuencia})^{-1} \\ &= \text{ergs s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \end{aligned}$$

Nota que I_ν depende de su posición en el espacio, dirección, y de frecuencia.

El flujo neto. Supongamos ahora que tenemos un campo de radiación (o sea, rayos en todas direcciones) y construimos un elemento pequeño de área dA con una orientación arbitraria \mathbf{n} (figura 1.3). La cantidad diferencial de flujo por el ángulo sólido $d\Omega$ (donde el área efectiva es $\cos\theta \cdot dA$) se reduce por la disminución del área efectiva).

El flujo neto en la dirección \mathbf{n} , $F_\nu(\mathbf{n})$ es obtenido integrando dF sobre todo ángulo sólido:

$$F_\nu = \int I_\nu \cos \theta d\Omega .$$

Nota que si I_ν es un campo de radiación (que no es función del ángulo θ) entonces el flujo neto es cero, ya que $\int \cos\theta d\Omega = 0$. O sea, existe tanta energía cruzando dA en la dirección \mathbf{n} como en la dirección $-\mathbf{n}$.

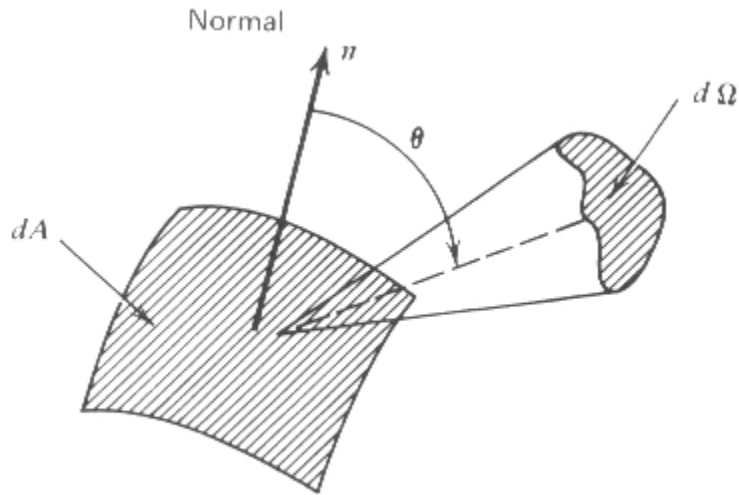


Figure 1.3 Geometry for obliquely incident rays.

Para obtener el momento del flujo normal a dA (momento por unidad tiempo, por unidad área = presión), nos recordamos que el momento de un fotón es E/c . Entonces, el momento del flujo a lo largo del rayo con ángulo θ es dF_ν/c . Para obtener el componente del momento del flujo normal a dA multiplicamos por otro factor $\cos\theta$. Integrando obtendremos,

$$p_\nu (\text{dinas} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}) = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega.$$

Nota que F_ν y p_ν son momentos (o sea, cantidades multiplicadas por factores de $\cos\theta$ e integrados sobre $d\Omega$) de la Intensidad I_ν . Claro, siempre podemos integrar sobre la frecuencia para obtener el flujo total y otros,

$$F (\text{erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}) = \int F_\nu d\nu$$

$$p (\text{dinas} \cdot \text{cm}^{-2}) = \int p_\nu d\nu$$

$$I(\text{ergs} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{ster}^{-1}) = \int I_\nu d\nu$$

La densidad de energía radiativa. La densidad de energía específica u_ν se define como la energía por unidad de volumen por unidad de rango de frecuencia. Para determinar esta cantidad es conveniente considerar primero la densidad de energía por unidad de ángulo sólido $u_\nu(\Omega)$ por $dE = u_\nu(\Omega)dVd\Omega d\nu$ donde dV es un elemento de volumen. Ahora consideramos un cilindro alrededor de un rayo de largo ct (figura 1.4). Como el volumen del cilindro es $dA \cdot c \cdot dt$, $dE = u_\nu(\Omega)dAcdtd\Omega d\nu$. La radiación viaja a la velocidad c , así que en un tiempo dt toda la radiación en el cilindro saldrá de él:

$$dE = I_\nu dA d\Omega dt d\nu.$$

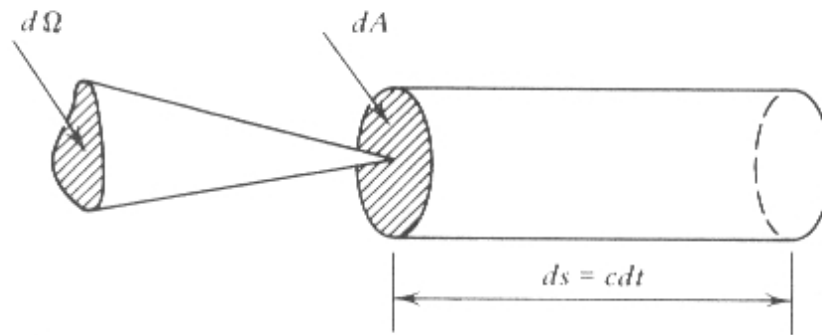


Figure 1.4 *Electromagnetic energy in a cylinder.*

Combinando las 2 ecuaciones anteriores obtenemos

$$u_\nu(\Omega) = \frac{I_\nu}{c}$$

Y si integramos sobre todo ángulo sólido tenemos que

$$u_\nu = \int u_\nu(\Omega)d\Omega = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega,$$

o

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu,$$

donde hemos definido J_ν como la intensidad promedio:

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega.$$

La densidad de energía total (ergs cm^{-3}) se obtiene simplemente integrando u_ν sobre todas las frecuencias

$$u = \int u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int J_\nu d\nu.$$

La presión de radiación de un campo de radiación isotropico dentro de un recinto. Si consideramos que el recinto es reflectivo cada fotón transfiere el doble de su componente normal de momento al ser reflejado por lo tanto la relación

$$p = \frac{2}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega.$$

Esta ecuación esta en acuerdo con nuestra previa ecuación para presión ya que aquí solo integramos sobre 2π esteradios. Ahora, por la isotropía, $I_\nu = J_\nu$ i.e.

$$p = \frac{2}{c} \int J_\nu d\nu \int \cos^2 \theta d\Omega$$

La integración sobre Ω nos deja con $p = \frac{1}{3}u$. La presión de radiación de un campo de radiación es una tercera parte de la densidad de energía. Un resultado importante en la discusión de la termodinámica de la radiación de cuerpos negros.

La constancia de la intensidad especifica a lo largo de los rayos en el vacío. Consideramos cualquier rayo L y dos puntos cualquiera a lo largo del rayo. Ahora construimos áreas dA_1 y dA_2 normal a los rayos en estos puntos. Como la energía se conserva podemos estudiar la energía acarreada

por un conjunto de rayos pasando a través de ambos dA_1 y dA_2 , figura 1.5, de la forma

$$dE_1 = I_{v_1} dA_1 dt d\Omega_1 dv_1 = dE_2 = I_{v_2} dA_2 dt d\Omega_2 dv_2.$$

Aquí $d\Omega_1$ es el ángulo sustentado por dA_2 desde dA_1 y vice-versa para $d\Omega_2$. Como $d\Omega_1 = dA_2/R^2$, $d\Omega_2 = dA_1/R^2$ y $dv_1 = dv_2$, entonces $I_{v_1} = I_{v_2}$. Por lo tanto la intensidad es constante a lo largo del rayo, $I_v = \text{constante}$.

Otra manera de expresar el resultado anterior es la forma diferencial

$\frac{dI_v}{ds} = 0$, donde ds es un elemento diferencial a lo largo del rayo.

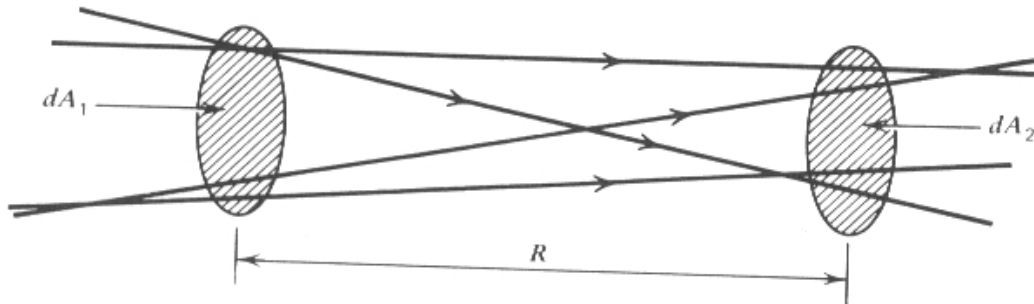


Figure 1.5 *Constancy of intensity along rays.*

Puede que algunos piensen que existe un conflicto entre la constancia de la intensidad específica y la ley del inverso al cuadrado. Calculemos el flujo a una distancia arbitraria de una esfera de brillo uniforme B (o sea, todos los rayos saliendo de la esfera tienen el mismo brillo). Obviamente una fuente. La intensidad específica en el punto P , Figura 1.6, es B si el rayo interseca la esfera y cero en cualquier otro caso. Entonces,

$$F = \int I \cos \theta d\Omega = B \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_c} \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

donde $\theta_c = \sin^{-1} R/r$ es el ángulo al cual el rayo de P es tangente a la esfera. Por lo que sigue que

$$F = \pi B (1 - \cos^2 \theta_c) = \pi B \sin^2 \theta_c \quad \text{o} \quad F = \pi B \left(\frac{R}{r} \right)^2$$

Por lo tanto la intensidad específica es constante, pero el ángulo sólido sostenido por el objeto disminuye de tal forma que recobramos la ley del cuadrado inverso. Cuando $r = R$ obtenemos que $F = \pi B$. Esto significa que el flujo de una superficie uniforme de brillo B es πB .

8 Fundamentals of Radiative Transfer

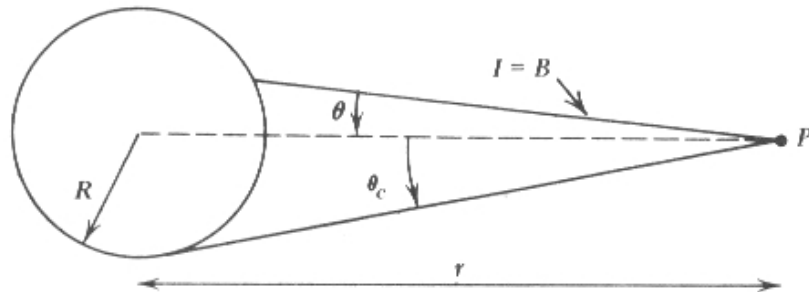


Figure 1.6 Flux from a uniformly bright sphere.

1.4 Transferencia Radiativa.

Energía podría ser añadida o perdida del rayo, por medio de emisión o absorción, si pasa a través de materia y la intensidad específica en general no se mantendrá constante. La “dispersión” de fotones hacia o fuera del haz también pueden afectar la intensidad.

Emisión.

El coeficiente de emisión espontánea j se define como la energía emitida por unidad de tiempo por unidad de ángulo sólido y por unidad de volumen:

$$dE = j dV d\Omega dt .$$

Un coeficiente de emisión monocromático también se podría definir en forma similar de forma que

$$dE = j_\nu dV d\Omega dt d\nu ,$$

donde j_ν tiene unidades de $\text{ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ esteradio}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$.

En general, el coeficiente de emisión depende de la dirección en la cual la emisión toma lugar. Para un emisor isotropico o para una distribución orientada al azar de emisores podremos escribir

$$j_\nu = \frac{1}{4\pi} P_\nu,$$

donde P_ν es la potencia radiada por unidad de volumen por unidad de frecuencia. A veces, la emisión espontánea se define por la emisividad ϵ_ν , que a su vez se define como la energía emitida espontáneamente por unidad de frecuencia por unidad de tiempo por unidad de masa con unidades de $\text{ergs gm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$. Si la emisión es isotropica, entonces

$$dE = \epsilon_\nu \rho dV dt d\nu \frac{d\Omega}{4\pi},$$

donde ρ es la densidad de masa del medio emisor y el último factor toma en consideración la fracción de energía radiada hacia $d\Omega$. Comparando las dos expresiones anteriores para dE , obtenemos la relación entre ϵ_ν y j_ν :

$$j_\nu = \frac{\epsilon_\nu \rho}{4\pi},$$

la cual se sostiene para emisión isotropica. Al viajar una distancia ds , un haz con sección transversal dA viaja a través de un volumen $dV = dA ds$. Por lo que la intensidad añadida al haz por emisión espontánea es:

$$dI_\nu = j_\nu ds.$$

Absorción.

Definimos el coeficiente de absorción, α_ν (cm^{-1}) con la ecuación siguiente, que representa la perdida de intensidades el haz mientras viaja una distancia ds (por convención α_ν es positivo para energía que se pierda del haz):

$$dI_\nu = -\alpha_\nu I_\nu ds.$$

Esta ley fenomenológica se puede entender en términos de un modelo microscópico en que partículas con densidad n (número por unidad de volumen), cada una con un área de absorción efectiva (sección transversal) con magnitud σ_v (cm^2). Asumimos que estos “absorbedores” están distribuidos al azar. ¿Cómo afectarían estos absorbedores la radiación pasando a través de dA dentro de un ángulo sólido $d\Omega$ (figura 1.7)? El número de absorbedores en el elemento es igual a $n dA ds$, por lo que el área total de absorción presentada por los absorbedores es igual $n\sigma_v dA ds$. La energía absorbida del haz es

$$-dI_\nu dA d\Omega dt d\nu = I_\nu (n\sigma_v dA ds) d\Omega dt d\nu ;$$

entonces $dI_\nu = -n\sigma_v I_\nu ds$, lo cual es exactamente la misma ley fenomenológica con la que empezamos donde $\alpha_\nu = n\sigma_v$. Por lo usual α_ν se expresa como $\alpha_\nu = \rho\kappa_\nu$, donde ρ es la densidad de masa y κ_ν ($\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$) se le conoce como el coeficiente de absorción de masa; κ_ν a veces se le conoce también como el coeficiente de opacidad.

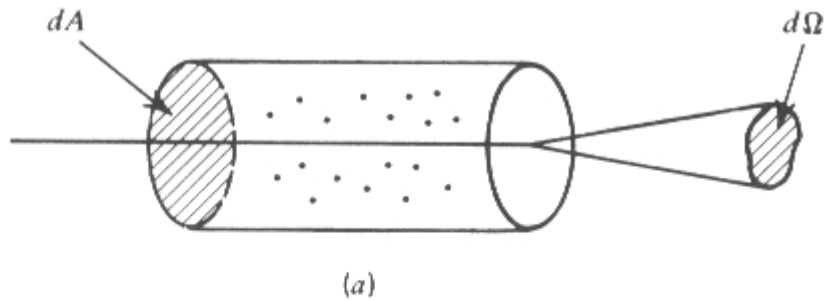


Figure 1.7a Ray passing through a medium of absorbers.

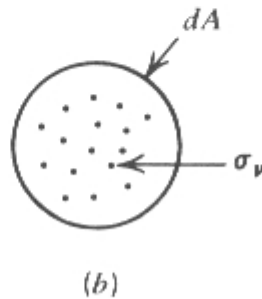


Figure 1.7b Cross sectional view of 7a.

Claro, si requerimos de algunas condiciones para que este modelo sea valido. Entre las más importantes están: (1) la escala lineal de la sección transversal debe ser muy pequeña en comparación con la distancia promedio entre partícula d . Por lo que, $\sigma_v^{1/2} \ll d \sim n^{1/3}$, de donde sigue $\alpha_v d \ll 1$ y (2) los absorbedores son independientes y están distribuidos al azar. Afortunadamente, estas condiciones casi siempre se cumplen en situaciones astrofísicas.

Como veremos mas tarde, hemos considerado como absorción no solo absorción pero emisión estimulada por que ambos son proporcionales a la intensidad del haz (no el caso para emisión espontánea). Por lo tanto, la absorción neta puede ser positiva o negativa dependiendo si domina la absorción o emisión estimulada. Aunque, la combinación puede verse artificial, mostrara ser conveniente y evitara que tengamos que añadir un formalismo cuántico a nuestro modelo clásico.

La ecuación de transferencia de energía.

Ahora podemos incorporar los efectos de emisión y absorción en la misma ecuación describiendo la variación de intensidad especifica a lo largo del rayo. De las expresiones anteriores para emisión y absorción obtenemos

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu.$$

La ecuación de transferencia provee un formalismo muy útil para poder resolver para la intensidad en un medio donde ocurren emisión y absorción. La expresión incorpora la mayoría de los aspectos macroscópicos de la radiación y los relacione a dos coeficientes, α_ν y j_ν . Parte del curso será de buscar formas en que estos coeficientes correspondan a procesos físicos particulares.

Cuando se conocen los coeficientes α_ν y j_ν es relativamente fácil resolver la ecuación de transferencia para la intensidad especifica. Si existe dispersión en el medio la solución es más complicada porque la emisión hacia $d\Omega$ depende de I_ν como función de $d\Omega'$, e integrar. En este caso la ecuación de transferencia se convierte en una ecuación integro-diferencial y generalmente se tiene que solucionar con técnicas de métodos numéricos.

Pronto presentaremos la solución formal para la ecuación de transferencia pero antes veamos dos casos extremos pero sencillos.

1. Emisión solamente: $\alpha_v = 0$. Entonces, $\frac{dI_v}{ds} = j_v$, y la solución es

$$I_v(s) = I_v(s_0) + \int_{s_0}^s j_v(s') ds'.$$

El aumento de brillo es igual al coeficiente de emisión integrado a lo largo de la línea de visión.

2. Absorción solamente: $j_v = 0$. Entonces, $\frac{dI_v}{ds} = -\alpha_v I_v$, y la solución es

$$I_v(s) = I_v(s_0) \exp\left[-\int_{s_0}^s \alpha_v(s') ds'\right].$$

El brillo disminuye a lo largo del rayo por el exponencial del coeficiente de absorción integrado a lo largo de la línea de visión.

Profundidad Óptica y la función de fuente.

La ecuación de transferencia toma una forma muy sencilla si en vez de s utilizamos otra variable τ_v , profundidad óptica, definida como $d\tau_v = \alpha_v ds$, o

$$\tau_v(s) = \int_{s_0}^s \alpha_v(s') ds'.$$

La profundidad óptica se mide a lo largo del paso por el cual viaja el rayo; ocasionalmente τ_v se mide en dirección opuesta a lo largo del rayo y se añade un signo negativo a la expresión anterior. En un medio de tipo plano-paralelo, una profundidad óptica “estandar” se usa a veces para medir la distancia normal a la superficie, y así reemplazamos ds por dz y $\tau_v = \tau_v(z)$. Cuando sea necesario distinguiremos entre ambas definiciones. El punto s_0 es arbitrario y solo define el punto cero para la escala de profundidad óptica.

Se dice que un medio es ópticamente grueso u opaco cuando τ_v , integrado a lo largo de un paso típico a través del medio, satisface $\tau_v > 1$. Cuando $\tau_v < 1$, se dice que el medio es ópticamente delgado o transparente. Esencialmente, un medio ópticamente delgado es uno donde un fotón típico

de frecuencia ν puede atravesar el medio sin ser absorbido. Podemos re-escribir la ecuación de transferencia de este modo

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -I_\nu + S_\nu, \quad \text{donde definimos } S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}.$$

y S_ν se conoce como la función de fuente y se define como la razón del coeficiente de emisión al coeficiente de absorción. Por lo general la función de fuente es una cantidad física más sencilla que el coeficiente de emisión. También, la profundidad óptica nos indica más claramente los intervalos importantes a lo largo del rayo en lo concerniente a la radiación. Por estas razones, es más práctico, usar las variables τ_ν y S_ν en vez de α_ν y j_ν .

Ahora podemos formalmente resolver la ecuación de transferencia considerando todas las cantidades como funciones de la profundidad óptica τ_ν en vez de s . Si multiplicamos la ecuación por el factor de integración e^{τ_ν} y definimos las cantidades $S \equiv S_\nu e^{\tau_\nu}$ y $I \equiv I_\nu e^{\tau_\nu}$. Entonces la ecuación se convierte en

$$dI/d\tau_\nu = S$$

con la solución $S(\tau_\nu) = S(0) + \int S(\tau'_\nu) d\tau'_\nu$. Si re-escribimos la ecuación en términos de I_ν y S_ν , la solución formal de la ecuación de transferencia resulta:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} S_\nu(\tau'_\nu) d\tau'_\nu$$

Como τ_ν es solo un factor sin dimensiones para la absorción, la solución se puede interpretar como la suma de dos términos: la intensidad inicial disminuida por la absorción más la fuente integrada disminuida por absorción. Como ejemplo, consideremos una función de fuente constante S_ν . Entonces la ecuación anterior tendrá como solución

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) = S_\nu + e^{-\tau_\nu}(I_\nu(0) - S_\nu).$$

Mientras $\tau_\nu \rightarrow \infty$, $I_\nu \rightarrow S_\nu$. Si consideramos dispersión el término S_ν contiene una contribución de I_ν por lo que no se puede especificar S_ν a priori. La solución es aun más compleja.

Para tener una simple interpretación física de la función de fuente y ecuación de transferencia consideremos lo siguiente. De la ecuación de transferencia vemos que si $I_\nu > S_\nu$, entonces $dI_\nu/d\tau_\nu < 0$ y I_ν tiende a disminuir a lo largo del rayo. Si $I_\nu < S_\nu$, entonces I_ν tiende a incrementar a lo largo del rayo. Por lo tanto, la función de fuente es la cantidad a la cual la intensidad específica se trata de acercar, y si se acerca, si la profundidad óptica es suficientemente alta. En este caso la ecuación de transferencia describe un proceso de relajamiento.

El paso promedio libre.

Un concepto muy útil, que describe absorción en una forma equivalente, es el del paso promedio libre de la radiación (o fotones). Se define como la distancia promedio que un fotón puede viajar a través de un material absorbente sin ser absorbido. Este puede ser relacionado muy fácilmente al coeficiente de absorción de un material homogéneo. De la ley exponencial de absorción (solución de la ecuación de transferencia para solamente absorción) podemos obtener la probabilidad de que un fotón pueda viajar al menos una profundidad óptica τ_ν y es simplemente $e^{-\tau_\nu}$. La profundidad óptica promedio viajada es entonces igual a uno:

$$\langle \tau_\nu \rangle \equiv \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1.$$

La distancia física promedio viajada en un medio homogéneo se define como el paso promedio libre ℓ_ν y se determina por $\langle \tau_\nu \rangle = \alpha_\nu \ell_\nu = 1$ o

$$\ell_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{n\sigma_\nu}.$$

Por lo tanto, el paso libre promedio ℓ_ν es simplemente el recíproco del coeficiente de absorción, para un material homogéneo.

Podemos definir el paso promedio local en un punto dentro de un material no-homogéneo como el paso libre promedio que resultaría si el fotón viajara a través de una región homogénea muy grande con las mismas propiedades. Para que así, en cualquier punto $\ell_\nu = 1/\alpha_\nu$.

Fuerza Radiativa.

Si un medio absorbe radiación entonces la radiación ejerce una fuerza sobre el medio, por que radiación acarrea momento. Comencemos definiendo el vector de flujo de radiación

$$F_v = \int I_v n d\Omega,$$

donde n es un vector unitario a lo largo de la dirección del rayo. El momento del fotón es E/c , por lo que el vector de momento por unidad área por unidad tiempo por unidad del largo del paso absorbido por el medio es

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{c} \int \alpha_v F_v d\nu.$$

Como $dA ds = dV$, \mathfrak{S} es la fuerza por unidad de volumen impartida al medio por el campo de radiación. Notamos que la fuerza por unidad de masa del material esta dado por $f = \mathfrak{S} / \rho$ o

$$f = \frac{1}{c} \int \kappa_v F_v d\nu.$$

Las últimas dos ecuaciones asumen que el coeficiente de absorción es isotropico. También se asume que ningún momento se imparte por la emisión de la radiación, lo cual es cierto para emisión isotropica.

1.5 Radiación Termal.

Radiación termal es la radiación emitida por la materia en equilibrio termal.

Radiación de cuerpo negro.

Para investigar la radiación termal es necesario considerar primeramente la radiación de cuerpo negro, radiación la cual esta en equilibrio termal.

Para obtener este tipo de radiación mantenemos un recinto a temperatura T y no permitimos que radiación entre o salga hasta que alcance el equilibrio térmico. Si somos cuidadosos, podríamos abrir un pequeño agujero en un

lado del envase y medir la radiación dentro sin perturbar el equilibrio. Ahora, utilizando algunos argumentos termodinámicos generales más el hecho que los fotones no tienen masa, podemos derivar algunas propiedades importantes de la radiación de cuerpo negro.

Como los fotones no tienen masa, pueden ser creados y destruidos en cantidades arbitrarios por las paredes del envase (para todo propósito práctico la auto-interacción entre fotones es insignificante). Por lo tanto, no existe una ley conservativa para el número de fotones (diferente al número de partículas para baryones), y esperamos que el número de fotones se ajustara por si mismo en equilibrio a temperatura T .

16 Fundamentals of Radiative Transfer

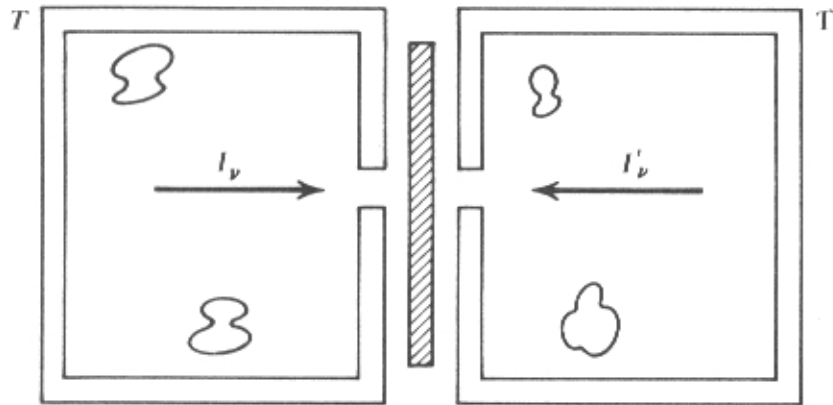


Figure 1.8 Two containers at temperature T , separated by a filter.

Una propiedad importante de I_ν es que es independiente de las propiedades del recinto y depende solo de la temperatura. Para comprobar esto, consideremos poner dos envases de forma arbitraria muy cerca el uno del otro. Ponemos un filtro entre ellos que permita que solo radiación de cierta frecuencia ν (figura 1.8). Si $I_\nu \neq I'_\nu$, la energía fluiría espontáneamente entre los dos recintos. Como estos están a la misma temperatura, esto violaría la segunda ley de termodinámica. De modo que tendríamos las relaciones

$$I_\nu = a \text{ la función universal de } T \text{ y } \nu \equiv B_\nu(T).$$

no queda de otra más que I_ν sea independiente de la forma del envase. Un corolario es que también es isotropico; $I_\nu \neq I'_\nu(\Omega)$. A la función $B_\nu(T)$ se le llama la función de Planck.

La ley de Kirchhoff para emisión termal.

Consideremos ahora un elemento de algún material que emita de forma termal a una temperatura T , para que su emisión dependa solamente de la temperatura y propiedades internas. Colocamos este elemento dentro del recinto de cuerpo negro (Figura 1.9). Definimos la función de fuente del material como S_ν . Si $S_\nu > B_\nu$, entonces $I_\nu > B_\nu$, y si $S_\nu < B_\nu$, entonces $I_\nu < B_\nu$. Pero la presencia del material no puede alterar la radiación pues la nueva configuración también es un cuerpo negro a temperatura T . Por lo tanto tenemos las relaciones: $S_\nu = B_\nu(T)$ y $j_\nu = \alpha_\nu B_\nu(T)$. La segunda expresión se conoce como la ley de Kirchhoff y relaciona α_ν y j_ν y la temperatura T de la materia. La ecuación de transferencia para la radiación termal se convierte en

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + \alpha_\nu B_\nu(T) \quad 0$$

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + B_\nu(T).$$

Como $S_\nu = B_\nu$, a través del recinto del cuerpo negro, entonces tenemos que $I_\nu = B_\nu$ de la misma manera. La radiación de cuerpo negro es homogénea e isotropica para que $p = \frac{1}{3}u$. Seria bueno definir bien la distinción entre *radiación de cuerpo negro*, donde $I_\nu = B_\nu$, y *radiación termal*, donde $S_\nu = B_\nu$. **La radiación termal se convierte en radiación de cuerpo negro solo para un medio opticamente denso (opaco).**

La termodinámica del cuerpo negro.

La radiación de cuerpo negro puede ser tratada por métodos termodinámicos como cualquier sistema en equilibrio termodinámico. Construyamos un recinto con un pistón y que se comporte como un cuerpo negro para que así trabajo se pueda hacer sobre la radiación o extraída de esta (fig 1.10).

Ahora, por la 1ra ley de termodinámica $dQ = dU - pdV$ donde Q es calor y U es la energía total. Por la 2da ley de termodinámica $dS = dQ/T$ donde S se define como entropía.

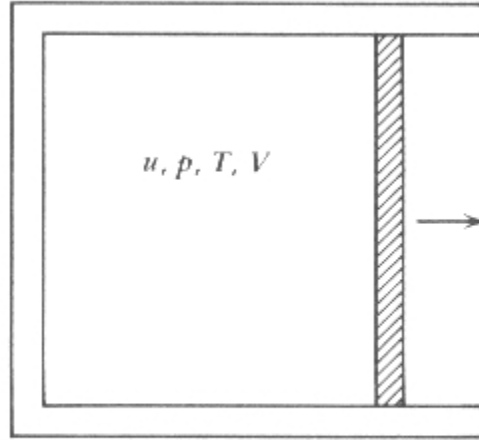


Figure 1.10 Blackbody enclosure with a piston on one side.

Pero, $U = uV$, y $p = u/3$, y u solo depende de T porque $u = (4\pi/c)J_v dv$ y $J_v = B_v(T)$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} dS &= \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{u}{T} dV + \frac{1}{3} \frac{u}{T} dV, \\ &= \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4u}{3T} dV \end{aligned}$$

Como dS es un diferencial perfecto,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{4u}{3T}$$

Por lo que obtenemos

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = -\frac{4u}{3T^2} + \frac{4}{3T} \frac{du}{dT},$$

así que

$$\frac{du}{dT} = \frac{4u}{T}, \qquad \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T},$$

$$\log u = 4 \log T + \log a ,$$

Donde el log a es una constante de integración. Por lo que obtenemos la ley de Stefan-Boltzmann

$$u(T) = \sigma T^4 .$$

Podemos relacionar esta expresión a la función de Planck ya que $I_\nu = J_\nu$ para radiación isotropica,

$$u = \frac{4\pi}{c} \int B_\nu(T) d\nu = \frac{4\pi}{c} B(T) ,$$

donde la función integrada de Planck se define por

$$B(T) = \int B_\nu(T) d\nu = \frac{ac}{4\pi} T^4 .$$

El flujo emergente de una superficie emisora isotropica (como la de un cuerpo negro) es π x brillantes ($F = \pi B$), para que así

$$F = \int F_\nu d\nu = \pi \int B_\nu d\nu = \pi B(T) .$$

Esto nos lleva a otra forma de la Ley de Stefan-Boltzmann $F = \sigma T^4$,

donde

$$\sigma \equiv ac/4 = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ deg}^{-4} \text{ s}^{-1} ,$$

$$a \equiv 4\sigma/c = 7.56 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ deg}^{-4} .$$

Las constantes a y σ no pueden ser determinadas por argumentos termodinámicos macroscópicos, pero si pueden ser derivadas. Sabemos que la entropía de la radiación de cuerpo negro, S, esta dado por

$$S = \frac{4}{3} a T^3 V$$

Entonces la ley de expansión adiabática para radiación de cuerpo negro es

$$TV^{1/3} = \text{constante, o}$$

$$pV^{4/3} = \text{constante.}$$

Estas ecuaciones son las familiares leyes adiabáticas $pV^\gamma = \text{constante}$ con $\gamma = 4/3$.

El espectro de Planck.

Podemos derivar la función de Planck. La derivación consiste de dos partes: primero, derivamos el estado de la densidad de fotones en una cavidad de cuerpo negro; segundo, evaluamos el estado de la energía promedio por fotón.

Consideremos un fotón de frecuencia ν propagándose en dirección \mathbf{n} dentro de una caja. El vector de la onda del fotón es $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)\mathbf{n} = (2\pi\nu/c)\mathbf{n}$. Si las dimensiones de la caja L_x , L_y , y L_z son mas grandes que la longitud de onda, entonces el fotón se puede representar por algún tipo de onda estacionaria en la caja. El número de nodos en la onda en cada dirección x , y , y z es $n_s = k_x L_x / 2\pi$ ya que existe un nodo por cada número integral del largo de onda en cada dirección ortogonal. Ahora, se puede decir que la onda ha cambiado de estado en una forma apreciable cuando el número de nodos en una dirección dada, cambia por uno o más. Si $n_i \gg 1$, podemos escribir el número de cambios de nodos en un intervalo del numero de onda como,

$$\Delta n_x = \frac{L_x \Delta k_x}{2\pi} .$$

Por lo que el número de estados en un elemento del vector de onda de 3-dim $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z \equiv d^3 k$ es

$$\Delta N = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = \frac{L_x L_y L_z d^3 k}{(2\pi)^3} .$$

Sabiendo que $L_x L_y L_z = V$ (el volumen del envase) y utilizando el hecho que los fotones tienen dos polarizaciones independientes (dos estados por vector de onda \mathbf{k}) determinamos que el número de estados por unidad de volumen por unidad 3-dim del número de onda es $2/(2\pi)^3$.

Como
$$d^3k = k^2 dk d\Omega = \frac{(2\pi)^3 v^2 dv d\Omega}{c^3},$$

podemos encontrar la densidad de los estados (el número de estados por ángulo sólido por volumen por frecuencia) que es

$$\rho_s = \frac{2v^2}{c^3}.$$

Ahora preguntamos cual es la energía promedio de cada estado. Sabemos por la teoría cuántica que cada fotón de frecuencia ν tiene una energía dada por $h\nu$, así que nos enfocamos en una sola ν y nos preguntamos cual es la energía promedio del estado con frecuencia ν . Cada estado puede tener n fotones con energía $h\nu$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$ por lo que la energía puede ser $E_n = nh\nu$. Según la teoría de mecánica cuántica, la probabilidad de un estado con energía E_n es proporcional a $e^{-\beta E_n}$ donde $\beta = (kT)^{-1}$ y $k =$ constante de Boltzmann $= 1.38 \times 10^{-16}$ erg deg⁻¹. Entonces, la energía promedio es:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \right).$$

Utilizando la formula para la suma de series geométricas,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta} = (1 - e^{-\beta h\nu})^{-1}.$$

Por lo tanto tenemos el resultado:

$$\bar{E} = \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Ya que $h\nu$ es la energía de un fotón de frecuencia ν esta ecuación nos dice que el número promedio de fotones de frecuencia ν , n_ν , el “número de ocupación”, es

$$n_\nu = \left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]^{-1} .$$

La expresión para \bar{E} es la expresión “estándar” para las estadísticas de Bose-Einstein con un número sin-limite de partículas (potencial químico = 0). La energía por ángulo sólido por volumen por frecuencia es el producto de \bar{E} y la densidad de estados. Pero, también se puede expresar en términos de $u_\nu(\Omega)$, la densidad de energía por unidad de ángulo sólido. Así que tenemos

$$u_\nu(\Omega)dVd\nu d\Omega = \left(\frac{2\nu^2}{c^3}\right) \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} dVd\nu d\Omega ,$$

$$u_\nu(\Omega) = \frac{2h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/kT) - 1} .$$

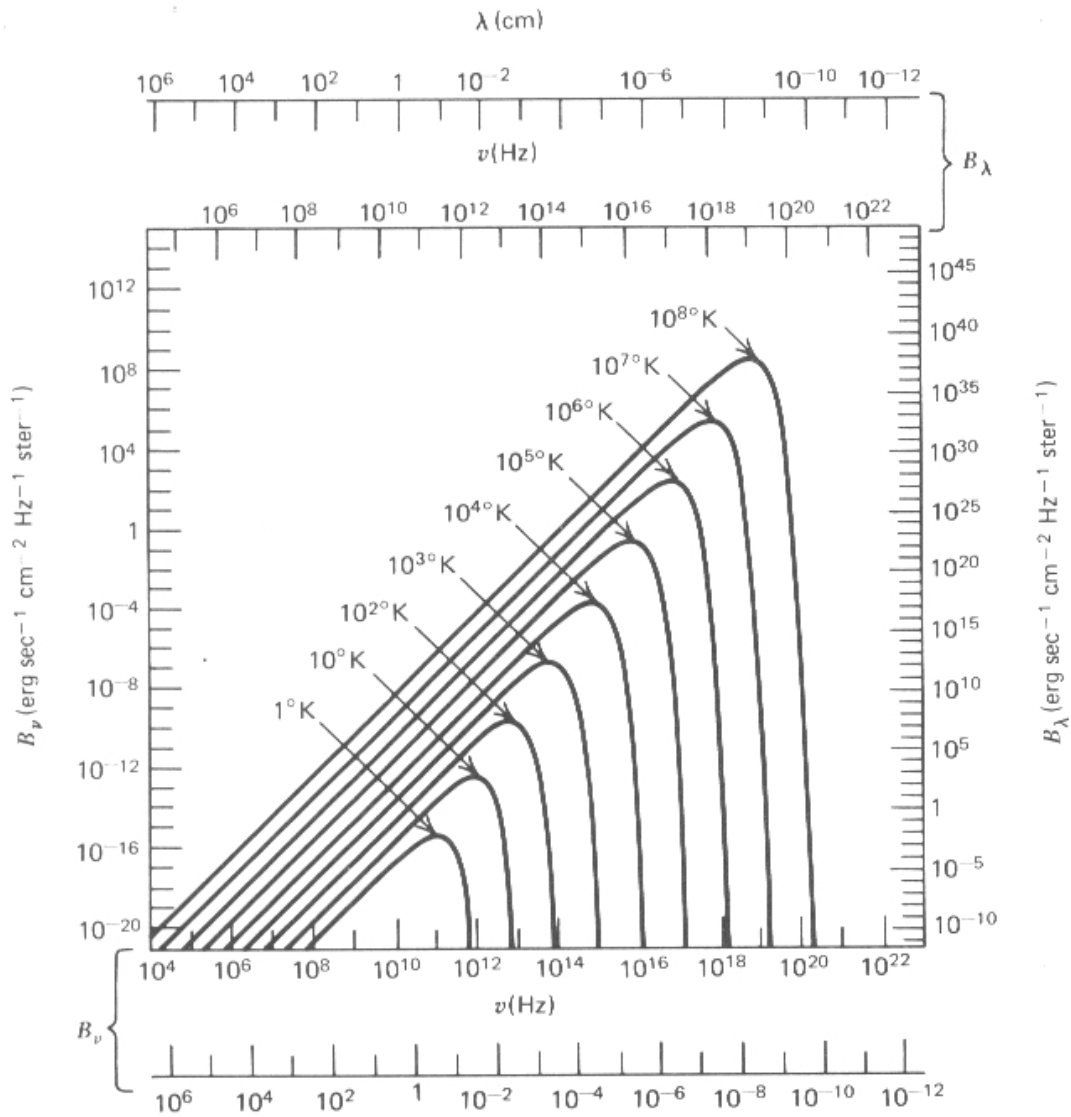
Ya habíamos visto que $u_\nu(\Omega) = I_\nu/c$, pero aquí tenemos que $I_\nu = B_\nu$ por lo que

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3/c^3}{\exp(h\nu/kT) - 1} . \quad \text{¡La Ley de Planck!}$$

Para la ley de Planck en función de la longitud de onda en vez de frecuencia obtenemos

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1} .$$

Una grafica de B_ν y B_λ en función de ν y λ para un rango de valores de T ($1\text{K} \leq T \leq 10^8 \text{K}$) se ve en la figura 1.11.



Propiedades de la Ley de Planck.

La forma de $B_\nu(T)$ que acabamos de derivar (ley de Planck) es uno de los resultados más importantes para el entendimiento de los procesos radiativos. Algunas propiedades y consecuencias de la ley son:

- 1. $h\nu \ll kT$: La ley de Rayleigh-Jeans.** En este caso la cantidad exponencial puede expandirse de la forma

$$\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 = \frac{h\nu}{kT} + \dots$$

de forma que para $h\nu \ll kT$, obtenemos la ley de Rayleigh-Jeans:

$$I_{\nu}^{RJ}(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT.$$

Es de notar que este resultado no contiene la constante de Planck. Originalmente fue derivada asumiendo el valor de equi-partición clásico para la energía de una onda electromagnética, $\bar{E} = kT$.

La ley de Rayleigh-Jeans se aplica para bajas frecuencias (casi siempre se aplica en la banda de radio). Aparece como la porción de la línea recta de la grafica de $\log B_{\nu} - \log \nu$ (fig 1.11).

Si la ley de Rayleigh-Jeans se aplicara para toda frecuencia, la cantidad total de energía $\propto \int \nu^2 d\nu$ y diverge. Esto se conoce como la catástrofe del ultravioleta. Para el caso de $h\nu \gg kT$, la naturaleza discreta cuántica de los fotones tendría que ser considerada.

2. $h\nu \gg kT$: La ley de Wien. En este límite, el término de unidad en el denominador se puede eliminar en comparación con $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)$, y entonces obtenemos la ley de Wien

$$I_{\nu}^W(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right).$$

Esta expresión fue propuesta primeramente por Wien en base a unos argumentos adhoc. La brillantes de un cuerpo negro decrece muy rápidamente con frecuencia después de alcanzar el máximo (noten la porción empinada de la curva en la fig 1.11 la cual esta asociada con la ley de Wien).

3. Monotonicidad de Temperatura.

Para dos curvas de cuerpos negro, la que represente una temperatura mayor aparece totalmente sobre la otra. Para probar esto notamos que

$$\frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} = \frac{2h^2\nu^4}{c^2kT^2} \frac{\exp(h\nu/kT)}{[\exp(h\nu/kT)-1]^2}$$

es positivo. A cualquier frecuencia, el efecto de aumentar la temperatura aumenta $B_\nu(T)$. También, $B_\nu \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow 0$ y $B_\nu \rightarrow \infty$ cuando $T \rightarrow \infty$.

4. La ley de desplazamiento de Wien.

La frecuencia ν_{\max} al cual ocurre el pico de $B_\nu(T)$ se puede encontrar resolviendo

$$\left. \frac{\partial B_\nu}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_{\max}} = 0.$$

Si permitimos que $x \equiv h\nu_{\max}/kT$, es equivalente a resolver $x = 3(1 - e^{-x})$, el cual tiene como raíz aproximada $x = 2.82$, para que $h\nu_{\max} = 2.82kT$, o $\frac{\nu_{\max}}{T} = 5.88 \times 10^{10} \text{ Hz} \cdot \text{deg}^{-1}$.

Por lo tanto el pico de la frecuencia de la ley de cuerpo negro se recoge linealmente con la temperatura y este efecto se conoce como la ley de desplazamiento de Wien.

Similarmente, la longitud de onda λ_{\max} al cual el máximo de $B_\lambda(T)$ ocurre cuando resolvemos la condición

$$\left. \frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{\max}} = 0.$$

Si permitimos que $y = hc/(\lambda_{\max}kT)$, es equivalente a resolver $y = 5(1 - e^{-y})$, el cual tiene como raíz aproximada $y = 4.97$, para que $\lambda_{\max}T = 0.290 \text{ cm deg}$. Esta también se conoce como la ley de desplazamiento de Wien.

Estas dos expresiones para la ley de Wien son muy razonables. Haciendo un análisis dimensional uno podría argumentar que el espectro de radiación de cuerpo negro debería tener su pico a una energía $\sim kT$, ya que kT es la única cantidad con dimensiones de energía que se puede obtener de k , T , h , c .

Curiosamente se debe notar que los picos de B_ν y B_λ no ocurren en el mismo lugar en longitud de onda o frecuencia; o sea, $\lambda_{\max} \nu_{\max} \neq c$. Un ejemplo, si $T = 7300$ K el pico de B_ν ocurre en $\lambda = 0.7$ micrones (rojo) mientras que el pico de B_λ ocurre en $\lambda = 0.4$ micrones (azul). La ley de desplazamiento de Wien nos brinda una forma conveniente de caracterizar el rango de frecuencias para la cual la ley de Rayleigh-Jeans es válida, básicamente que $\nu \ll \nu_{\max}$. De forma similar la ley de Wien requiere que $\nu \gg \nu_{\max}$.

5. La relación entre la constante de radiación y las constantes fundamentales. Utilizando la forma explícita de $B_\nu(T)$ en la función integrada de Planck podemos obtener expresiones para “a” y “σ” en términos de constantes fundamentales:

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \left(\frac{2h}{c^2} \right) \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

El integral se encuentra en tablas de integrales y tiene un valor de $\pi^4/15$. Por lo que el resultado es

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2\pi^4 k^4}{15c^2 h^3} T^4,$$

entonces $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}, \quad a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}.$

Las temperaturas características relacionadas al espectro de Planck.

1. Temperatura de brillo. Una forma de caracterizar el brillo (la intensidad específica) a cierta frecuencia es el de utilizar la temperatura del cuerpo negro que tiene el mismo brillo a esa frecuencia. O sea, para cualquier valor de I_ν definimos $T_b(\nu)$ por la relación $I_\nu = B_\nu(T_b)$.

A T_b se le conoce como la temperatura de brillo. Esta forma de expresar la brillantes tiene la ventaja de estar muy conectado con las propiedades físicas del emisor y la simple unidad de (K) en vez de ($\text{ergs cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{ster}^{-1}$). Este proceso se usa especialmente en Radioastronomía, donde por lo usual se aplica la ley Rayleigh-Jeans para que así

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT_b \quad \text{o} \quad T_b = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu$$

para $h\nu \ll kT$.

La ecuación de transferencia para emisión termal toma una forma muy simple en términos de la temperatura de brillo en el límite de Rayleigh-Jeans,

$$\frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T,$$

donde T es la temperatura del material. Cuando T es constante obtenemos

$$T_b = T_b(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad h\nu \ll kT.$$

Si la profundidad óptica es grande, la temperatura de brillo de la radiación se acerca a la temperatura del material. Notamos que la exclusividad de la definición de la temperatura de brillo depende en la monoticidad de la Ley de Planck. También notamos que en general la temperatura de brillo es una función de ν . La temperatura de brillo será la misma a toda temperatura solo si la fuente es un cuerpo negro.

El concepto de temperatura de brillo no es tan útil en la región de Wien de la Ley de Planck por la caída rápida de B_ν en ν , y porque no es posible formular una ecuación de transferencia lineal para la temperatura de brillo.

2. Temperatura de color. Es muy común que se mida un espectro con su forma (curva) muy cercana a la de un cuerpo negro pero no necesariamente con el valor absoluto propio. Por ejemplo, si medimos F_ν (flujo neto) de una fuente no resuelta (muy compacta para la resolución del instrumento) no podremos obtener I_ν (intensidad específica) a menos que sepamos la distancia a la fuente y su tamaño. Si ajustamos la data con una curva de cuerpo negro, sin considerar la escala vertical, podemos obtener la temperatura de color T_c . A menudo, el ajuste es tan sencillo como estimar la temperatura pico del espectro y aplicar la ley de Wien para encontrar la temperatura.

La temperatura de color T_c nos indicara correctamente la temperatura de cuerpo negro de una fuente de escala absoluta desconocida. También, T_c nos dará la temperatura de un emisor termal que sea ópticamente delgado,

siempre y cuando el espesor óptico sea razonablemente constante para las frecuencias cerca del pico. En este caso, la temperatura de brillo será menor que la temperatura del emisor ya que el espectro de cuerpo negro nos indica la intensidad máxima obtenible de un emisor termal a temperatura T (utilizando los argumentos generales termodinámicos).

3. Temperatura efectiva. La temperatura efectiva T_{eff} de una fuente se deriva de la cantidad total de flujo integrado sobre todas las frecuencias radiadas por la fuente. Obtenemos T_{eff} igualando el flujo actual F al flujo de un cuerpo negro a temperatura T_{eff} :

$$F = \int I_{\nu} \cos \theta d\nu d\Omega \equiv \sigma T_{\text{eff}}^4 .$$

Noten que ambos T_{eff} y T_b dependen de la magnitud de la intensidad de la fuente pero T_c depende solamente de la curva del espectro observado.

1.6 Los coeficientes de Papa Einstein.

Definición de los coeficientes.

La Ley de Kirchhoff, $j_{\nu} = \alpha_{\nu} B_{\nu}$, la cual relaciona la emisión y la absorción de un emisor termal, también claramente implica que existe alguna relación entre emisión y absorción a un nivel microscópico. Esta relación fue descubierta por Papa Einstein en un análisis simple de las interacciones de fotones con sistemas atómicos. El considero el caso de dos niveles discretos de energía: el primero con energía E y con un peso estadístico g_1 , el segundo con energía $E + h\nu_0$ con un peso estadístico g_2 (ver figura 1.12). El sistema hace una transición de 1 a 2 por la absorción de un fotón de energía $h\nu_0$. Similarmente, la transición de 2 a 1 ocurre cuando se emite un fotón. Papa Einstein definio 3 procesos:

1. Emisión espontanea: Esto ocurre cuando el sistema esta en el nivel 2 y cae al nivel 1 emitiendo un fotón y ocurre aun en la ausencia de un campo radiativo. Definimos el coeficiente A de Papa Einstein como,

A_{21} = la probabilidad de transición por unidad de tiempo para emisión espontanea (seg^{-1})

2. Absorción: Esto ocurre en la presencia de fotones de energía $h\nu_0$. El

sistema hace una transición del nivel 1 al 2 al absorber un fotón. Como no existe auto-interacción del campo radiativo, esperamos que la probabilidad por unidad de tiempo para este proceso será proporcional a la densidad de fotones (o a la intensidad promedio) a una frecuencia ν_0 . Para ser precisos, debemos reconocer que la diferencia en energía entre los dos niveles no es infinitamente agudo (o fino) pero es descrito por la función del perfil de línea $\phi(\nu)$, la cual tiene un pico muy agudo en $\nu = \nu_0$ y es convenientemente es normalizada de manera

$$\int_0^{\infty} \phi(\nu) d\nu = 1.$$

Esta función del perfil de línea describe la efectividad relativa de las frecuencias en la vecindad de ν_0 para causar transiciones. Quizás más tarde discutamos los mecanismos físicos que determinan a $\phi(\nu)$. Pero estos argumentos nos llevan a expresar que

$B_{12}\bar{J}$ = la probabilidad de transición por unidad de tiempo para absorción donde

$$\bar{J} \equiv \int_0^{\infty} J_{\nu} \phi(\nu) d\nu.$$

La constante de proporcionalidad B_{12} es el coeficiente B de Papa Einstein.

3. Emisión estimulada: Papa Einstein encontró que para derivar la Ley de Planck se requería otro proceso que fuera proporcional a \bar{J} y que causara emisión de un fotón. Como antes, definimos:

$B_{21}\bar{J}$ = la probabilidad de transición por unidad de tiempo para emisión estimulada. El B_{21} es otro coeficiente B de Papa Einstein.

Noten que cuando J_{ν} cambia lentamente sobre el ancho de la línea $\Delta\nu$, $\phi(\nu)$ se comporta como una función delta (δ -function) y las probabilidades por unidad de tiempo para la absorción y emisión estimulada se convierten en $B_{12}J_{\nu_0}$ and $B_{21}J_{\nu_0}$, respectivamente. En la discusión original de Papa Einstein esta suposición es implícita. Es importante mencionar que usualmente se utiliza la densidad de energía u_{ν} en vez de J_{ν} para definir los coeficientes B de Papa Einstein lo cual nos lleva a una definición que difiere por $c/4\pi$ de la expresión original.

28 Fundamentals of Radiative Transfer

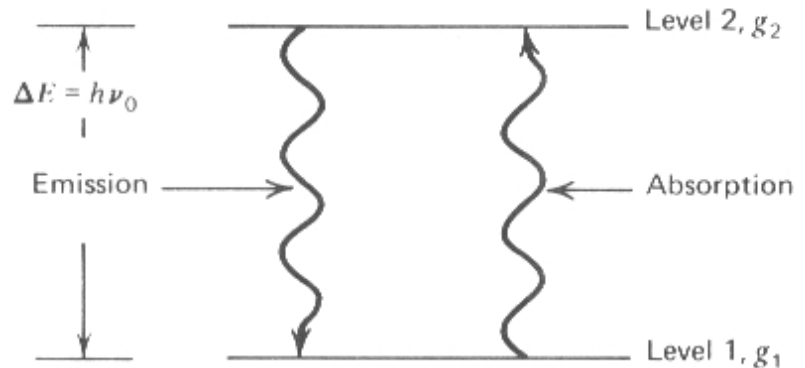


Figure 1.12a Emission and absorption from a two level atom.

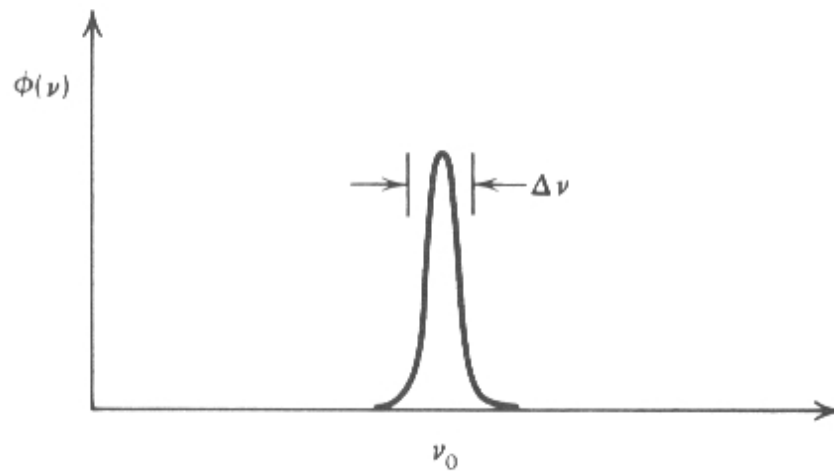


Figure 1.12b Line profile for 12a.

Relación entre los coeficientes de Papa Einstein.

En equilibrio termodinámico obtenemos que el número de transiciones por unidad de tiempo por unidad de volumen **del** nivel 1 = al número de transiciones por unidad de tiempo por unidad de volumen **al** nivel 2. Si definimos n_1 y n_2 como las densidades de átomos en los niveles 1 y 2, respectivamente, podemos expresar la relación como

$$n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J}.$$

Si ahora resolvemos para \bar{J} ,
$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{B_{12}}{B_{21}}\right)}.$$

En equilibrio termodinámico la razón entre n_1 y n_2 es

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1 \exp(-E/kT)}{g_2 \exp[-(E + h\nu_0)/kT]} = \frac{g_1}{g_2} \exp(h\nu_0/kT),$$

Por lo que

$$\bar{J} = \frac{A_{21}/B_{21}}{\left(\frac{g_1 B_{12}}{g_2 B_{21}}\right) \exp(h\nu_0/kT) - 1}.$$

Pero en equilibrio termodinámico también sabemos que $J_v = B_v$ y el hecho que B_v varía lentamente en la escala de Δv implica que $J = B_v$. Para que esta expresión se igual a la función de Planck para todas las temperaturas tenemos que utilizar las siguientes relaciones de Papa Einstein:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21},$$

$$A_{21} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{21}.$$

Estas relaciones conectan las propiedades atómicas representadas por A_{21} , B_{21} y B_{12} y no tienen referencia alguna con la temperatura T (como las leyes de Kirchhoff). Por lo que estas expresiones deben ser sostenidas estén o no los átomos en equilibrio termodinámico. Estas expresiones son ejemplos de lo que generalmente se conocen como *relaciones de balance detallado* que conectan cualquier proceso microscópico y su proceso inverso, aquí absorción y emisión. Estas relaciones de Papa Einstein son la extensión de la ley de Kirchhoff donde se incluye la emisión no-termal que ocurre cuando la materia no está en equilibrio termodinámico. Si podemos determinar cualquiera de los coeficientes A_{21} , B_{21} o B_{12} las relaciones nos permiten determinar las otras dos y esto tendrá valor considerable más tarde.

Einstein incluyó el proceso de emisión estimulada por que sin ello no podía obtener la ley de Planck. Sin esto solo obtenía la ley de Wien, la cual ya se conocía estar en error. ¿Por qué solo se obtiene la ley de Wien cuando se excluye la emisión estimulada? Note que la ley de Wien es la expresión de la ley de Planck para $h\nu \gg kT$. Pero cuando $h\nu \gg kT$, el nivel 2 está poblado muy escasamente relativo al nivel 1, $n_2 \ll n_1$. Por lo que la emisión estimulada no es importante comparado con la absorción ya que estos son proporcional a n_2 y n_1 , respectivamente.

Una propiedad de la emisión estimulada es que toma lugar hacia la misma dirección y frecuencia (de hecho, a el mismo estado del fotón). El fotón emitido es precisamente coherente con el fotón que estimulo la emisión.

Los coeficientes de absorción y emisión en términos de los coeficientes de Papa Einstein.

Para obtener el coeficiente de emisión j_ν debemos suponer algo sobre la distribución de la frecuencia de la radiación emitida durante la transición espontánea del nivel 2 al nivel 1. La suposición más simple es que la emisión está distribuida de acuerdo a la misma función del perfil de línea $\phi(\nu)$ que describe la absorción (por lo usual esta suposición es muy buena en astrofísica). La cantidad de energía emitida por unidad de volumen dV , ángulo sólido $d\Omega$, rango de frecuencia $d\nu$ y tiempo dt es, por definición, $j_\nu dV d\Omega d\nu dt$. Como cada átomo contribuye una energía $h\nu_0$ distribuida sobre un ángulo sólido 4π para cada transición, también se puede expresar como $(h\nu_0/4\pi)\phi(\nu)n_2A_{21}dVd\Omega d\nu dt$. Así el coeficiente de emisión es

$$j_\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu).$$

Para obtener el coeficiente de absorción primero notamos que de la expresión para $B_{21}\bar{J}$ y $\bar{J} \equiv \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu$ la energía total absorbida en un tiempo dt y volumen dV es

$$dV dt h\nu_0 n_1 B_{12} (4\pi)^{-1} \int d\Omega \int d\nu \phi(\nu) I_\nu.$$

Por lo tanto la energía absorbida del haz con un rango de frecuencia $d\nu$ ángulos sólido tiempo dt y volumen dV es

$$dV dt d\Omega d\nu \frac{h\nu_0}{4\pi} n_1 B_{12} \varphi(\nu) I_\nu .$$

Tomando un elemento de volumen para que $dV = dA ds$, y las expresiones para dE y dI_ν obtenemos el coeficiente de absorción (sin corrección para la emisión estimulada):

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \varphi(\nu) .$$

¿Y que de la emisión estimulada? Quizás uno pensaría que esta contribuiría al coeficiente de emisión pero debemos notar que este es proporcional a la intensidad y que solo afecta los fotones a lo largo del haz, muy análogo al del proceso de absorción. De hecho, es más conveniente considerar la emisión estimulada como absorción negativa e incluir su contribución a través del coeficiente de absorción. En términos operativos estos dos procesos siempre ocurren juntos y no pueden ser desenredados por experimentos. Entonces, utilizando argumentos análogos podemos determinar la contribución de la emisión estimulada al coeficiente de absorción. El resultado es

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} \varphi(\nu) (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) .$$

Es esta la cantidad a la cual nos referimos cuando hablemos del coeficiente de absorción. La expresión previa la llamaremos el coeficiente de absorción sin corregir por emisión estimulada.

Ahora podremos escribir la ecuación de transferencia en términos de los coeficientes de Papa Einstein:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\frac{h\nu}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) \varphi(\nu) I_\nu + \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21} \varphi(\nu) .$$

La función de fuente puede ser obtenida dividiendo el coeficiente de emisión y el coeficiente de absorción:

$$S_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} .$$

Utilizando las relaciones de Papa Einstein podemos re-escribir el coeficiente de absorción y la función de fuente

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left(1 - \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1} \right) \varphi(\nu),$$

$$S_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\frac{g_2 n_1}{g_1 n_2} - 1 \right)^{-1}.$$

Esta ecuación es la ley generalizada de Kirchhoff. Podemos discutir tres casos en donde identificamos estas expresiones.

1. Emisión termal (LTE): Si la materia esta en equilibrio termal consigo mismo (aunque no necesariamente con la radiación) tenemos

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right),$$

y se dice que la materia esta en equilibrio termodinámico local (LTE en ingles). Para este caso,

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \left[1 - \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right) \right] \varphi(\nu),$$

$$S_\nu = B_\nu(T).$$

Este valor termal para la función de fuente es solo una forma de la ley de Kirchhoff. Un nuevo resultado es el factor de corrección $1 - \exp(-h\nu/kT)$ en el coeficiente de absorción que se debe a la radiación estimulada.

2. Emisión no-termal: Este término cubre todos los otros casos en donde

$$\frac{n_1}{n_2} \neq \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right).$$

Por ejemplo, para un plasma, esto ocurría si las partículas que radian no tuviesen una distribución de velocidad Maxwelliana o si la población

atómica no obedeciese la ley de distribución Maxwell-Boltzmann. El término también se puede aplicar para los casos en que exista dispersión.

3. Poblaciones invertidas: MASERES: Para un sistema en equilibrio térmico tenemos

$$\frac{n_2 g_1}{n_1 g_2} = \exp\left(\frac{-h\nu}{kT}\right) < 1,$$

para que así

$$\frac{n_1}{g_1} > \frac{n_2}{g_2}.$$

Esta relación por lo usual se satisface aun cuando el material no este en equilibrio térmico. En este caso se dice que son poblaciones normales. Pero, es posible poner suficientes átomos en el nivel superior para que tengamos una población invertida:

$$\frac{n_1}{g_1} < \frac{n_2}{g_2}.$$

En este caso el coeficiente de absorción es negativo: $\alpha_\nu < 0$, como se ve en la definición del coeficiente de absorción (producto de las relaciones de Papa Einstein). En vez de decrecer a lo largo del haz, la intensidad incrementa. Este tipo de sistema se conoce como MASER o LASER (microwave amplification by stimulated emission of radiation; o Light).

La amplificación de la cual hablamos es muy grande. Por ejemplo, una profundidad óptica negativa de -100 con lleva una amplificación por un factor de 10^{43} (caso de la ecuación de transferencia para absorción solamente). Una descripción detallada de los maseres es un campo especializado y no el propósito de este curso. Acción maser en líneas moleculares se ha observado en muchas fuentes astrofísicas.