Modelos Combinatorios de Confiabilidad en Redes.

Dr. Ing. Franco Robledo (Responsable del Curso)
IMERL/Dpto. de Investigación Operativa (INCO) - UDELAR
Montevideo, Uruguay

Curso de Postgrado, marzo de 2009

Facultad de Ingeniería - UDELAR

Contenido del Curso.

i) Intruducción - Motivación.

ii) Fundamentos básicos de la Teoría de Grafos.

iii) Conectividad en Grafos.

iv) Modelos de Confiabilidad en Aristas.

v) Modelos de Confiabilidad en Nodos.

vi) Modelos de Confiabilidad en Aristas y Nodos.

vii) Métodos Monte Carlo

viii) Métodos de Reduccion de Varianza.

ix) Presentación de los problemas de confiabilidad a resolver.

Confiabilidad en Redes

DEFINICIÓN (GRAFO PROBABILÍSTICO): $G = (V, E)$ un grafo simple no dirigido con V el conjunto de nodos y E el conjunto de aristas, y una función de probabilidad: $\mathcal{P} : V \cup E \longrightarrow [0, 1]$.

- Se asume que las probabilidades planteadas son independientes.
- Luego cada enfoque (de aristas o de nodos) asumirá la ausencia de fallas en alguna de las componentes (nodos o aristas respectivamente).
- Estos supuestos restringen el cupo de aplicación del modelo pero, aún así, este es un modelo que proporciona resultados en la práctica, adaptándose a numerosos casos.

Confiabilidad en Redes

- El estudio de los modelos de confiabilidad refiere a la capacidad de la red de encontrarse en un estado operativo bajo ciertas circunstancias, generalmente luego de fallas.

- Se entiende por "estado operativo" aquel en el que la red es capaz de realizar una operación determinada.

Definición (Source-Terminal reliability): Sea s un nodo ($source$) y t otro nodo ($terminal$). Se define la $s - t$ confiabilidad como la probabilidad de que exista al menos un camino entre s y t. A esta medida se la denotará por $R_{\{s,t\}}(G)$.

Confiabilidad en Redes

En el otro extremo, otra operación que se presenta en el *broadcasting*, consiste en comunicarse entre todos los nodos, definiéndose el siguiente concepto.

Definición (All-terminal reliability): Corresponde a la probabilidad de que entre cualquier par de nodos de la red exista al menos un camino que los comunique. A esta medida se la denotará por $R_V(G)$.

Una operación que generaliza las anteriores es la siguiente.

Definición (K-terminal reliability): Se define como $R_K(G)$ la probabilidad de que exista comunicación entre cualquier par que tomemos dentro de un conjunto K de nodos objetivo (*targets*).

Confiabilidad en Redes

- MODELOS PROBABILISTICOS. Estos modelos plantean estudiar la confiabilidad de la red, partiendo del conocimiento de las probabilidades de falla de los componentes, llegando a determinar un índice correspondiente a la probabilidad de que la red o una parte de ella se encuentre operativa.
  Podemos distinguir los siguientes enfoques:
  - Modelo de Aristas (Arista Confiabilidad).
  - Modelo de Nodos (Nodo Confiabilidad).
  - Modelo Nodos-Aristas (Nodo-Arista Confiabilidad).

- Los modelos probabilísticos de confiabilidad se basan en que los elementos componentes de los grafos pueden encontrarse o no en estado operativo, con una cierta probabilidad dada.

Confiabilidad en Redes

Definición (State): Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no dirigido, definimos un state o estado de G como un subconjunto $S \subseteq V \cup E$ en el cual todos los elementos de S están operativos y los de S^c no lo están.

Definición (Operación y SBS): Introducimos una operación sobre la red definiendo el conjunto $OP(G) \subseteq 2^{E \cup V}$ correspondiente a los estados operacionales y el conjunto $FA(G) = 2^{E \cup V} - OP(G)$ de los estados en falla. El set $OP(G)$ es llamado *Stochastic Binary System* (*SBS*).

Definición (pathset y minpath): Se define como *pathset* al conjunto de elementos que definen un estado operativo. Especificando los *pathsets* para G tenemos el *SBS* y por consiguiente definimos la operación sobre la red. Los pathsets minimales son llamados *minpaths*, enteniéndose por minimal el hecho de que si quitamos un elemento, el estado resultante deja de ser operativo.

Edge Reliability

$\Rightarrow$ El Modelo parte de la hipótesis de que los nodos son perfectos (no fallan) y las aristas fallan con ciertas probabilidades de falla.

DEFINICIÓN (*Polynomial Reliability*): Se define Confiabilidad Polinomial como la probabilidad de que sobreviva un estado operacional al fallar un cierto subconjunto de aristas.

Asumiendo que todas las aristas tienen la misma probabilidad p de operación, sea N_i el número de subgrafos operacionales (*pathsets*) con i aristas. Entonces:

$$R(G,p) = \sum_{i=0}^{m} N_i \cdot p^i \cdot (1-p)^{m-i}, \text{con } m = |E|.$$

Edge Reliability

- $R(G, p)$ es un polinomio en p de grado m.
- La *Confiabilidad Polinomial* permite analizar variaciones de p sin tener que aplicar un algoritmo convencional.
- Puede ser aplicada a la hora de decidir entre topologías de red, estimando las confiabilidades antes de la construcción de la misma.
- Métodos Exactos de Cálculo de la Arista Confiabilidad:
  - Enumeración Completa de Estados (Método de Fuerza Bruta).
  - Método de Inclusión-Exclusión.
  - Método de Poincaré.
  - Algoritmos de Factorización.

Edge Reliability

- Existen métodos aproximados para el cálculo del valor de la confiabilidad.

- En general estos métodos pertenecen a la familia de Métodos Monte-Carlo, caracterizada por la generación de múltiples estados del sistema y la realización del cálculo de la medida deseada por intermedio de estimadores estadísticos, de los cuales se calcula también su varianza.

- Métodos Aproximados de Cálculo de la Arista Confiabilidad:
  - Método Monte-Carlo Crudo.
  - Método Antitético.
  - Método Antitético Generalizado.
  - Muestreo Basado en Cotas.

Edge Reliability

Definición (Estado Operacional): Dado $G = (V, E)$, $S \subseteq V$, S es un estado operacional si el grafo engendrado por S es conexo.

Definición (Sistema Monótono): Un sistema se dice monótono si dado S, estado operacional del sistema, se cumple que $\forall T$ tal que $S \subseteq T$, T es un estado operacional del sistema.

Nota: *En general los modelos de Arista Confiabilidad son Sistemas Monótonos, mientras que los modelos de Nodo Confiabilidad no.*

Ejemplo: Sea el grafo $G = (V, E)$ dado por: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_4)\}$.

$\Rightarrow$ Observar que $S = \{v_1, v_2\}$ es un estado operacional, sin embargo $S' = \{v_1, v_2, v_4\}$ no lo es; $G(S')$ no es conexo.

Edge Reliability

Se brindan los siguientes resultados de Análisis de Complejidad:

LEMA (ROSENTAL, 1975): *El cómputo de la medida* $R_K(G)$ *(*$K-$*terminal-reliability) es un problema NP-Hard.*

TEOREMA (VALIANT, 1979): *El cómputo de la medida* $R_{\{s,t\}}(G)$ *(source-terminal reliability) es un problema* $\#P-$*Completo.*

TEOREMA (PROVAN-BALL, 1983): *El cómputo de la medida* $R_V(G)$ *(all-terminal reliability) es un problema* $\#P-$*Completo.*

- Este último resultado fue demostrado también por M. Jerrum (PhD Thesis, Universidad de Edinmurgo, Report CST-11-81, 1981).

Edge Reliability

Método de Fuerza Bruta:

- Se basa en calcular todos los estados posibles ($2^{|E|}$ estados de G) y medir los *pathsets*.

- Para el reconocimiento se utiliza un algoritmo que en general es aceptado como entrada y la medición consiste en sumar las probabilidades de ocurrencia de cada *pathset*.

- Propiedad de Coherencia: *todo superconjunto de un pathset es un pathset.*
  Esto implica que la determinación de todos los *pathsets* se reduce a la de los *minpaths*.

Edge Reliability

MÉTODO DE INCLUSIÓN - EXCLUSIÓN:

- En el caso de *all-terminal reliability*, los *minpaths* son árboles de cubrimiento, en casos de $s - t$ *reliability* son arborescencias de raíz s.
- Estos árboles son generados con un algoritmo similar al de generación de cubrimiento general.

NOTACIÓN:

- $P_1, \ldots, P_h$ los minpaths de G. Sea E_i el evento en el cuál todas las aristas de P_i están operativos.
- $P(E_i)$ la probabilidad del evento E_i.

Edge Reliability

Método de Inclusión - Exclusión:

- La confiabilidad es entonces la probabilidad de que uno o más eventos $\{E_i\}$ ocurran. Considerando que los eventos $\{E_i\}$ no son disjuntos, el cálculo de la confiabilidad resulta en la expresión:

$$R(G) = \sum_{j=1}^{h} (-1)^{j+1} \sum_{I \subseteq \{1..h\}, |I|=j} P(E_I),$$

  donde E_I es el evento en el cual todos los caminos P_i están operacionales, $i \in I$.

- Teniendo la lista de *minpaths*, se calcula la probabilidad de cada subset de un *minpath*. La confiabilidad vendrá de evaluar la suma anterior.

Edge Reliability

DEDUCCIÓN DE FÓRMULA DE INCLUSIÓN-EXCLUSIÓN:

- Sabemos que $P(E_1 \text{ o } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \text{ y } E_2)$. Por otro lado,

$$R(G) = P(E_1 \text{ o } E_2 \text{ o } E_3 \cdots E_s),$$

  por lo tanto:

$$R(G) = \sum_{j=1}^{h} (-1)^{j+1} \sum_{I \subseteq \{1..h\}, |I|=j} P(E_I).$$

- Veremos una mejora el Método de Inclusión-Exclusión.

Edge Reliability

DEFINICIONES:

- $i-$*formación* de un subgrafo es un set de i *minpaths* cuya unión es el subgrafo.

- Una formación es *par* si i es par, y es *impar* si i es impar.

- Una *formación par* contribuye positivamente a la confiabilidad, mientras que una *formación impar* contribuye negativamente.

- se define *signed domination* de G como el número de *formaciones pares* de G menos el número de *formaciones impares* de G. Valor denotado por $sdom(G)$.

Edge Reliability

Método de Satyanarayana-Prabhakar:

- El cálculo de la confiabilidad resulta en la expresión:

$$R(G) = \sum_{H \subseteq G} sdom(H) P(H),$$

  donde H varia sobre todos los estados de G.

- Esta simplificación es substancial. Sin embargo, se requiere de cierto esfuerzo si se quiere mejorar la enumeración completa, en particular se requiere conocer el *signed domination* de cada estado.

Edge Reliability

Algoritmos de Factorización - Definiciones Básicas.

Definición (Contracción de una arista): Si la arista contraída es $e \in G = (V, E)$, $e = (x, y)$, el grafo contraído, que notaremos G_e, viene dado por $G_e = (V', E')$, con $V' = V - \{x\}$ y $E' = E - \{e\}$ y toda arista (w, x) será sustituida por (w, y).

Definición (Eliminación de arista): Consiste en retirar la arista del grafo obteniendo un nuevo grafo: $(G - e) = (V, E')$, $E' = E - \{e\}$.

Teorema de Factorización: *Si calculamos $R_K(G)$ condicionado con respecto al estado de la arista e podemos expresar:*

$$R_K(G) = r_e \cdot R_{K'}(G_e) + (1 - r_e) \cdot R_K(G - e),$$

con $R_{\{x\}} = 1$, K' obtenido de K luego de la contracción.

Edge Reliability

Algoritmos de Factorización - Definiciones Básicas.

- Se asume $r_e \neq 0$, $r_e \neq 1$. Dado que si $r_e = 0$ se cumple $R_K(G) = R_K(G - e)$ y si existe e tal que $r_e = 1$ se cumple $R_K(G) = R_{K'}(G_e)$.

- Por lo cual la contracción o eliminación de dicha arista transformará al grafo en otro tal que $\forall e$, $r_e \neq 0$, $r_e \neq 1$.

- la recursividad genera un árbol de $2^{|E|} - 1$ nodos y $2^{|E|-1}$ hojas que corresponden a los posibles estados de G.

Edge Reliability

ALGORITMOS DE FACTORIZACIÓN - DEFINICIONES BÁSICAS.

DEFINICIÓN (ARISTAS EN SERIE): Decimos que dos aristas e_1 y e_2 están en serie si son adyacentes y además, si $e = (x, y)$ y $e_2 = (y, z)$ se tiene $y \notin K$ y además no existe $e_j = (y, l)$ con $e_j \neq e_1$, $e_j \neq e_2$.

DEFINICIÓN (REDUCCIÓN EN SERIE): Una reducción en serie consiste en reemplazar dos aristas $e_1 = (x, y)$ y $e_2 = (y, z)$ que están en serie, por una arista e tal que $e = (x, z)$. La confiabilidad de e será $r_{e_1} \cdot r_{e_2}$ con r_{e_1} y r_{e_2} las confiabilidades de e_1 y e_2 respectivamente.

DEFINICIÓN (ARISTA EN PARALELO): Dos aristas están en paralelo si tienen los mismos extremos.

Edge Reliability

ALGORITMOS DE FACTORIZACIÓN - DEFINICIONES BÁSICAS.

DEFINICIÓN (REDUCCIÓN EN PARALELO): Una reducción en paralelo consiste en reemplazar dos aristas paralelas por una arista e tal que $r_e = r_{e_1} + r_{e_2} - r_{e_1} \cdot r_{e_2}$.

DEFINICIÓN (CONJUNTO ÉXITO): Es un conjunto minimal de aristas de G que forman un subgrafo de G en el cual los vértices de K están conectados. Minimal en el sentido que si se elimina una arista los vértices de K quedan desconectados.

DEFINICIÓN ($K-$ÁRBOL): Topológicamente un conjunto éxito es un árbol de G que cubre todos los vértices de K. A esto le llamamos un $K-$árbol. Resulta obvio que un $K-$árbol puede contener vértices de G que no están en K pero los vértices que penden de él si pertenecen a K.

Edge Reliability

Algoritmos de Factorización - Definiciones Básicas.

Definición (Arista Irrelevante): Es una arista de G que no aparece en ningún $K-$árbol.

Definición ($K-$grafo): Decimos que un grafo respecto de un conjunto K de vértices es un $K-$grafo sii toda arista del grafo aparece en algún $K-$árbol de G, o sea un grafo es un $K-$grafo sii no contiene aristas irrelevantes respecto de K.

Definición (Formación de un grafo): Es un conjunto de $K-$árboles del grafo cuya unión forma el grafo. Es claro que un grafo que tiene aristas irrelevantes o no es conexo no puede tener formaciones. Si la formación contiene un número par de $K-$árboles la formación es par, si contiene un número impar de $K-$árboles decimos que es impar.

Edge Reliability

ALGORITMOS DE FACTORIZACIÓN - DEFINICIONES BÁSICAS.

DEFINICIÓN (DOMINACIÓN DEL GRAFO - $D_K(G)$): Se define $D_K(G) = |N_o - N_e|$ donde N_o es el número de formaciones pares y N_e es el número de formaciones impares (sin valor absoluto denotamos como $d_K(G) = N_o - N_e$).

DEFINICIÓN (PUNTO DE ARTICULACIÓN): Punto de articulación de un grafo es un vértice tal que G es conexo pero $G - v$ no lo es. Cada parte conexa de $G - v$ recibe el nombre de componente conexa de $G - v$.

DEFINICIÓN (GRAFO SEPARABLE): Grafo que contiene al menos un punto de articulación.

Edge Reliability

ALGORITMOS DE FACTORIZACIÓN - DEFINICIONES BÁSICAS.

DEFINICIÓN (BLOQUE DE UN GRAFO): Dado un grafo conexo $G = (V, E)$ y un subgrafo $G^* = (V^*, E^*)$. G^* es un bloque de G sii G^* no es separable y maximal (con respecto al grafo inducido o engendrado por los vértices).

DEFINICIÓN (BLOQUE PENDIENTE): Un bloque pende o es pendiente de un grafo sii entre sus vértices existe solamente un punto de articulación del grafo.

DEFINICIÓN (GRAFO $s-p$ REDUCTIBLE): Un grafo es $s-p$ reductible si por sucesivos reducciones en serie o paralelo se puede reducir a un árbol.

DEFINICIÓN (GRAFO COMPLEJO): Es un grafo que no es un $K-$árbol y no posee aristas en serie o paralelo.

Edge Reliability

ALGORITMOS DE FACTORIZACIÓN - DEFINICIONES BÁSICAS.

- A continuación se presentan una serie de teoremas referentes a la dominación de un grafo, su invarianza ante $s-p$ reducciones, y la influencia en la implementación del Algoritmo de Factorización de Satyanarayana-Chang.

- El punto central de los algoritmos de factorización es el problema de la elección de la arista con respecto a la cual se va a factorizar.

TEOREMA DE LA DOMINACIÓN: *Sea G un $K-$grafo. Entonces:*

$$D_K(G) = D_{K'}(G_e) + D_K(G - e).$$

Edge Reliability

Algoritmos de Factorización - Definiciones Básicas.

Teorema (Invariancia de $D_K(G)$ por $s-p$ reducciones): *Sea G un $K-$grafo. Entonces $D_K(G)$ es invariante por reducciones $s-p$.*

Teorema (Influencia de la Dominación): *El número de hojas en la estructura binaria obtenida por la aplicación recursiva de:*

$$R_K(G) = r_e \cdot R_{K'}(G_e) + (1 - r_e) \cdot R_K(G - e),$$

(con la convención $R_{\{x\}} = 1$ y K' obtenido luego de la contracción de e), aplicando $s-p$ reducciones es mayor o igual a $D_K(G)$.

Edge Reliability

ALGORITMOS DE FACTORIZACIÓN - DEFINICIONES BÁSICAS.

LEMA: *Un grafo conexo sin lazos no es un* $K-$*grafo sii tiene un vértice de corte* v *tal que* $(G-v)$ *tiene una componente conexa sin vértices de* K.

LEMA: *Si* G *es un* $K-$*grafo,* $\forall e \in G$ *al menos uno entre* $(G-e)$ *y* G_e *es un* $K-$*grafo.*

TEOREMA (CARACTERIZACIÓN DE UN K-GRAFO): $D_K(G) \neq 0$ *sii* G *es un* $K-$*grafo.*

$\Rightarrow$ Veremos a continuación el estudio de existencia de arista pivot para lograr la estructura binaria óptima.

Edge Reliability

Algoritmos de Factorización - Definiciones Básicas.

- Del Teorema de la Influencia de la Dominación, se prueba que el número de hojas halladas en la estructura que se obtiene por la recurrencia del Teorema de Factorización para $R_K(G)$, es mayor o igual a $D_K(G)$, y el óptimo se da cuando el número de hojas coincide con $D_K(G)$, lo que ocurre si en cada paso se elige e tal que $D_{K'}(G_e) \neq 0$ y $D_K(G-e) \neq 0$.

- De de la Caracterización de un $K-$grafo, se sabe que lo anterior se cumplirá, si se elige e tal que $(G-e)$ y G_e son $K-$grafos, pues entonces ambas dominaciones serán distintas de 0. Resta investigar si para todo K-grafo G se puede encontrar e tal que $(G-e)$ y G_e son $K-$grafos.

- Es suficiente que G^*, el grafo complejo que se obtiene de G por sucesivas $s-p$ reducciones, contenga una arista con esta propiedad.

Edge Reliability

ALGORITMOS DE FACTORIZACIÓN - RESULTADOS PREVIOS.

TEOREMA: *Si G es un $K-$grafo complejo y no separable tal que $|K| < |V|$, entonces G contiene $v \notin K$ tal que $(G - v)$ es $K-$grafo.*

TEOREMA (EXISTENCIA DE ARISTA PIVOT): *Sea G un $K-$grafo complejo tal que $D_K(G) > 1$. Se cumple entonces que G tiene una arista e tal que $D_K(G - e) \neq 0$ y $D_K(G_e) \neq 0$.*

TEOREMA (DOMINACIÓN UNITARIA): *Sea G un $K-$grafo. Entonces $D_K(G) = 1$ sii G es un grafo $s - p$ reductible con respecto a K.*

$\Rightarrow$ En el algoritmo FACT que se describirá seguidamente, se asegura la existencia de una arista pivot y éste último teorema nos permite saber como buscar los casos en que $R_K(G)$ se calcula en un sólo paso.

Edge Reliability

Algoritmo de Factorización FACT:

```
Algoritmo FACT(G);

  Mientras G no es complejo hacer s − p reducciones;
  Si G es un árbol entonces calcular: ∏_{e_i∈G} r_{e_i}.;
  Sino
    Elegir arista e que satisface el Teorema de Existencia de Arista Pivot;
    Calcular: r_e · FACT(G_e) + (1 − r_e) · FACT(G − e);
  fin_sino;
  fin_si;
```

Figure 1: Algoritmo FACT - Pseudocódigo.

$\Rightarrow$ En rigor si G es un árbol, es un K-árbol, pero aquí no es necesaria la aclaración, pues se supone la no existencia de aristas irrelevantes al inicio del algoritmo y el propio algoritmo no las introduce.

Edge Reliability

TEOREMA: *El número de hojas en la estructura binaria generada por el algoritmo* FACT *coincide con* $D_K(G)$*.*

$\Rightarrow$ El siguiente teorema muestra la justificación de la importancia destinada al algoritmo FACT, ya que muestra la eficiencia del mismo en tiempo y espacio.

TEOREMA (ÓRDEN DEL FACT): *Sea* G *un* $K-$*grafo, con* m *aristas y* n *nodos. El algoritmo* FACT *se puede ejecutar en tiempo* $O\left((b+n)\cdot D_K(G)\right)$ *y espacio* $O\left((b-n+1)\cdot |G|\right)$*.*

Edge Reliability

Algunas Consideraciones del FACT:

- El Teorema de la Dominación en general no es cierto para grafos dirigidos. La dominación de cualquier grafo dirigido que posee ciclos es cero y es fácil encontrar un ejemplo donde eligiendo una arista e, $(G - e)$ tenga dominación positiva.

- Cuando queremos calcular el índice de confiabilidad como $R_K(G)$ el algoritmo FACT tiene la ventaja de que no necesita enumerar todos los estados de la red.

- Además toma en cuenta la topología del grafo permitiendo que aristas en serie o paralelo puedan ser reducidas, simplificando el problema.

Edge Reliability

Algoritmos Exactos para Clases Restringidas.

- Veremos el caso de Grafos Completos. Para este caso existen algoritmos eficientes para Two-terminal y All-terminal reliability.

Caso All-Terminal. Definiendo $A_n = R_V(K_n)$ como el problema de all-terminal reliability aplicado al grafo completo de $n-$nodos, obtenemos una fórmula para A_n en términos de q, la probabilidad de falla de arista;

$$A_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} C_{j-1}^{n-1} \cdot A_j \cdot q^{j\cdot(n-j)}.$$

Edge Reliability

ALGORITMOS EXACTOS PARA CLASES RESTRINGIDAS.

CASO TWO-TERMINAL. Definiendo $T_n = R_{\{s,t\}}(K_n)$, se tiene:

$$T_n = \sum_{j=2}^{n-1} C_{j-2}^{n-2} \cdot A_j \cdot q^{j\cdot(n-j)}.$$

CASO K-TERMINAL. Definiendo $B_n = R_{\{K\}}(K_n)$, se tiene:

$$B_n = \sum_{j=k}^{n-1} C_{j-k}^{n-k} \cdot A_j \cdot q^{j\cdot(n-j)}.$$

Edge Reliability

ALGORITMOS EXACTOS PARA CLASES RESTRINGIDAS.

LEMA (GILBERT): *Sea $A_{n,m}$ la all-terminal reliability del grafo bipartito completo $K_{n,m}$ que tiene dos conjuntos independientes I_n e I_m con todas las aristas entre ellos. De un set K de k nodos, asumiendo r nodos en I_n y t nodos en I_m, la $K-$terminal reliability viene dada por:*

$$\sum_{i=r}^{n}\sum_{j=t}^{m} C_{i-r}^{n-r} \cdot C_{j-t}^{m-t} \cdot A_{i,j} \cdot q^{i\cdot(m-j)} \cdot q^{j\cdot(n-i)}.$$

- Otros casos particulares estudiados son: Árboles, usados en el diseño de redes de acceso local; grafos Serie-Paralelo, surgidos de las redes eléctricas; grafos planos, y grafos dirigidos acíclicos.

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: All-Terminal.

Definición (edge-partition): Una *edge-partition* de G en k grafos G_1, G_2, ..., G_k es obtenida particionando el conjunto de aristas E en k clases E_1, E_2, ..., E_k y definiendo $G_i = (V, E_i)$.

Definición (edge-packing): Un *edge-packing* de G en k grafos G_1, G_2, ..., G_k es obtenido particionando el conjunto de aristas E en $k+1$ clases E_1, E_2, ..., E_k, U y definiendo $G_i = (V, E_i)$.

Lema: *Si G tiene un edge-packing por k grafos G_1, G_2, ..., G_k, y Rel es alguna medida coherente de confiabilidad, entonces:*

$$Rel(G) \geq 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - Rel(G_i)).$$

Edge Reliability

COTAS EN EL CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD: ALL-TERMINAL.

DEFINICIÓN: Sea un grafo $G = (V, E)$ y sea P una partición de V. Entonces se define $G_P = (V_P, E_P)$ de la siguiente manera. V_P consiste las clases de la partición P y E_P es el conjunto de aristas de G que tienen como extremos a nodos pertenecientes a clases diferentes.

Una forma de ver esto, es contrayendo cada clase de nodos de P a un nodo simple, en el proceso *links* (aristas) entre nodos internos a una clase son omitidos.

TEOREMA (TUTTE-NASH-WILLIAMS): *Un grafo $G = (V, E)$ tiene un edge-packing de k árboles de cubrimiento sii para toda partición P de V, se cumple: $|E_P| \geq k \cdot (|V_P| - 1)$.*

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: All-Terminal.

- El Teorema de Tutte-Nash-Williams se aplica para determinar una cota inferior en el máximo número de árboles de cubrimiento de aristas disjuntas en términas de c, la cardinalidad de un corte mínimo de la red.

Teorema (Polesskii): *El máximo número de árboles de cubrimiento de aristas disjuntos en un grafo c−edge-connected* $G = (V, E)$, *es al menos* $\lfloor c/2 \rfloor$.

Cota de Polesskii: Para el caso en que la probabilidades de operación de las aristas sean iguales a p, se cumple que cada árbol de cubrimiento tiene confiabilidad p^{n-1}. Para un grafo *c-edge-connected* G de n nodos y con las probabilidades de operación de todas las aristas iguales a p, se tiene que: $R_V(G) \geq 1 - (1 - p^{n-1})^{\lfloor c/2 \rfloor}$.

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: Two-Terminal.

- El cálculo de los límites (cotas) inferiores en redes two-terminal, es un problema combinatorio de la teoría de flujos en redes. El uso de *edge-packing* para los caminos de confiabilidad de dos terminales ha sido estudiado por Colbourn.

- Sea $G = (V, E)$ un digrafo con nodos s (fuente) y t (terminal). Para manejar grafos no orientados, primero hay que transformarlos a digrafos reemplazando cada arista (x, y) por un par de aristas dirigidas (x, y) y (y, x). Esta transformación de grafos no dirigidos a grafos dirigidos, se hace debido a que los algoritmos de maximización de flujo en una red requieren ser aplicadas sobre éstos últimos. Cada arista a en G tiene una capacidad $C(a)$ asociada y un costo $Cost(a)$.

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: Two-Terminal.

Definición: Una asignación de flujo en G es una asignación de valores $f(a)$ a cada arista a, de modo que para cada arista a, $0 \leq f(a) \leq C(a)$. Además, la sumatoria de los valores de flujo que ingresan a cada nodo, excepto s y t, equivale a la suma de los flujos que salen del nodo. Es necesario que el flujo en las aristas que ingresan a s sea cero y que el flujo saliente de t teambién es cero.

Definición: Se define como el flujo total de la red a la cantidad de flujo que sale de s y que es igual al flujo que entra en t. El costo total de asignación de un flujo a la es es: $\sum_{a \in E} f(a) \cdot Cost(a)$.

Definición (Flujo Máximo): Se define flujo máximo al mayor flujo desde s hacia t logrado por calquier asignación de flujo.

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: Two-Terminal.

Definición (Corte de una Red): Se llama corte de la red a un conjunto de aristas cuyas remoción desconecta s de t. La capacidad de un corte es la suma de las capacidades de las aristas que lo componen. Un corte mínimo es un corte de capacidad mínima.

$\Rightarrow$ Uno de los teoremas fundamentales en la teoría de flujos en redes, es el Teorema de *Flujo máximo-Corte mínimo*, cuyo enunciado es el siguiente.

Teorema (Ford-Fulkerson): *El flujo máximo en G equivale a la capacidad de un corte mínimo.*

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: Two-Terminal.

⇒ Si todas las capacidades son iguales a 1, la capacidad del corte mínimo del Teorema de Ford-Fulkerson nos da la cantidad de caminos arista-disjuntos que comunican s con t en G.

Teorema (Menger): *El número máximo de edge-disjoints $s, t-$paths es igual a la cardinalidad mínima c de un $s, t-$cutset mínimo.*

Nota: a diferencia que en caso all-terminal, se tiene que el número de $s, t-$paths esta completamente especificado por c; de esta forma se puede esperar mejores cotas vía *edge-packing*. De todos modos, al contrario que en los casos all-terminal, no todos los $s, t-paths$ tienen la misma confiabilidad aún cúando los probabilidades de operación de las aristas sean las mismas.

Edge Reliability

COTAS EN EL CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD: TWO-TERMINAL.

TEOREMA (COLBOURN-BRECHT): *Suponiendo que G tiene f edge-disjoint paths de largos l_1, l_2, ..., l_f, tenemos:*

$$R_{\{s,t\}}(G) \geq 1 - \prod_{i=1}^{f}(1 - p^{l_i}).$$

NOTA: La mejor cota inferior no se obtiene necesariamente con $f = c$.

NOTA: Diferentes cotas pueden surgir de diferentes conjuntos de *edge-disjoints paths*, entonces la cota actual depende del algoritmo del flujo máximo utilizado.

NOTA: Aún cuando las probabilidades de operación de todas las aristas sean iguales, no es claro en general cómo obtener la mejor colección de *edge-disjoint paths*.

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: Two-Terminal.

Existen dos metas para conseguir una colección de caminos que produzcan una buena cota:

1) Maximizar el número de caminos.

2) Maximizar la confiabilidad de cada camino. Cuando las probabilidades de operación son iguales en todas las aristas, esto significa minimizar la longitud de cada camino.

Nota: El maximizar el número de caminos a expensas de sacrificar un camino pequeño, estos objetivos si se realizan separadamente son conflictivos.

Edge Reliability

COTAS EN EL CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD: TWO-TERMINAL.

Consideremos los siguientes problemas:

PROBLEMA 1: *Determinar una colección de short edge-disjoint paths cuando las probabilidades de operación de las aristas son iguales.*

PROBLEMA 2: *Determinar un conjunto de edge-disjoint paths confiables cuando las probabilidades de las aristas son diferentes.*

SOLUCIÓN A PROBLEMA 1: obtener un conjunto de camininos en los cuales la unión de ellos tenga el mínimo número posible de aristas.

SOLUCIÓN A PROBLEMA 2: obtener un conjunto de caminos utilizando las aristas mas confiables. En este conjunto, el producto de las confiabilidades de las aristas sobre el número de aristas, es el mayor posible.

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: Two-Terminal.

- Ambos problemas pueden ser tomados en un mismo marco: **el estudio de costo mínimo de flujos en red.**

- Se espera en general, que al seleccionar flujos de costo mínimo resulte en la selección de caminos confiables (caminos cortos o *short paths*).

- Más aún, podemos tener flujos de costo mínimo para cada $1 \leq f \leq c$ y para cada f, obtener una cota inferior utilizando los f *edge-disjoint paths* resultantes. Tomando la mejor cota inferior sobre todos los valores de f da el costo mínimo para la confiabilidad en redes *two-terminal*.

- La cota de mínimo costo es una ayuda en el intento de obtener caminos confiables, pero no es exacto.

Edge Reliability

COTAS EN EL CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD: TWO-TERMINAL.

⇒ Cuando las probabilidades de operación de las aristas son iguales, una buena selección de caminos escoge de ellos los más cortos posibles. Surge el siguiente problema.

PROBLEMA: *Dados f y l. ¿Puede determinarse si un grafo tiene f edge-disjoint paths, cada uno de longitud máxima l?. Un algoritmo que resolviese este problema se aplicaría al problema de confiabilidad.*

NOTA: Un algoritmo que resolviese este problema se aplicaría al problema de confiabilidad. Se ha logrado demostrar que este problema es NP-Completo.

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: Two-Terminal.

⇒ El siguiente resultado dice que el determinar el mejor conjunto de *edge-disjoint paths* es un problema NP-Hard.

Teorema (Raman): *Para todo grafo G con nodos s (fuente) y t (terminal) y probabilidad de operación de las aristas igual a p, es* $\mathrm{NP-Hard}$ *computar el mínimo de* $\prod_{i=1}^{f}(1-p^{l_i})$, *donde* $1 \leq f \leq c$ *y* G *tiene* f *edge-disjoint* s, t *paths con longitudes* l_1, ..., l_f.

Edge Reliability

COTAS EN EL CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD: K-TERMINAL.

- El problema de confiabilidad $K-$terminal en $G = (V, E)$ está prescrita por un conjunto K de nodos blanco (o nodos objetivo).

- Lo que se necesita es un método eficiente para encontrar un *edge-packing* máximo de G con árboles de Steiner en el conjunto objetivo K.

TEOREMA: *La compresión (packing) de árboles de Steiner es un problema NP-Completo.*

TEOREMA (COLBOURN): *Determinar si un grafo G con conjunto objetivo K tiene un edge-packing con k árboles de Steiner es un problema de clase* $\mathrm{NP-Hard}$ *para cada $k \geq 3$ fijado.*

Edge Reliability

Cotas en el Cálculo de la Confiabilidad: K-Terminal.

⇒ El anterior teorema de Colbourn elimina efectivamente toda esperanza de encontrar algoritmos eficientes para el *edge-packing* por árboles de Steiner. Un caso particular donde se determina una cota inferior para el caso del problema All-Terminal viene dado por el siguiente teorema.

Teorema (Ramanathan-Colbourn): *Dado un grafo G con $c-$edge-connectivity, y donde cada arista tiene probabilidad de operación igual a p. Se tiene que:*

$$R_V(G) \geq 1 - (1 - p^{n-1})^c.$$

Edge Reliability

Cotas Superiores en el Cálculo de la Confiabilidad.

⇒ Límites o cotas superiores no han sido extensamente estudiados. No obstante se puede desarrollar una teoría análoga. Veamos el siguiente resultado que nos proporciona una cota superior para el cálculo de la confiabilidad.

Teorema: *Sea $G = (V, E)$ un grafo y Rel una medida de confiabilidadd coherente. Sea C_1,...,C_s una edge-packing de G en cutsets. Entonces:*

$$Rel(G) \leq \prod_{i=1}^{s} \left[1 - \prod_{e \in C_i} (1 - p_e) \right],$$

donde p_e es la probabilidad de operación de la arista e.

Edge Reliability

COTAS SUPERIORES EN EL CÁLCULO DE LA CONFIABILIDAD.

⇒ En el caso de two-terminal se puede determinar el número máximo de $s, t-$*cuts* en un *edge-packing*. El resultado es el siguiente.

TEOREMA (ROBACKER): *El número máximo de edge-disjoint $s, t-$cuts es igual a la longitud mínima de un $s, t-$path.*

NOTA: Este teorema es muy importante pues permite la obtención de una cota superior para el cálculo de la confiabilidad en el caso two-terminal.

Edge Reliability

Otras Cotas.

Definición ($k-$cycle $C_{n,k}$): Un $k-$cycle $C_{n,k}$ es un grafo de n nodos obtenido de un ciclo simple de n nodos repitiendo cada arista k veces.

Definición: Un conjunto maximal de aristas paralelas es llamado *bundle*. Así, un $k-$cycle con n nodos tiene n bundles de tamaño k cada uno.

$\Rightarrow$ Notar que el $k-$cycle $C_{n,k}$ tiene nk aristas y arista-conectividad $2k$.

Teorema (Lomonosov): *Sea G un grafo de n nodos y arista-conectividad al menos $2k$. Entonces:*

$$R_V(G) \geq R_V(C_{n,k}).$$

Edge Reliability

Otras Cotas.

Teorema (Lomonosov-Polesskii): *Un grafo G con n nodos y c arista-conectividad, satisface la desigualdad:*

$$R_V(G) \geq n(1-(1-p)^{c/2})^{n-1} - (n-1)(1-(1-p)^{c/2})^{n}.$$

- Esta cota es llamada $k-cycles\ bound$ o simplemente cota inferior de Lomonosov-Polesskii.
- Para niveles impares de arista-conectividad las potencias de la cota no son enteros. En estos casos la cota no es rígida (*tight*).

Node Reliability

- Dado un grafo simple no dirigido $G = (V, E)$, el modelo de $Network$ $Reliability$ donde los aristas son perfectas (no fallan, i.e. $p_e = 1$, $\forall e \in E$) y los nodos fallan con ciertas probabilidades p_v, $\forall v \in V$, se le denomina usualmente $Nodal\ Reliability\ Problem$.

- Sea $G = (V, E)$ y W el conjunto de nodos operativos (no fallaron), diremos que la red se mantiene en estado operativo si
  - $W \neq \emptyset$ y
  - el grafo inducido por W, $G(W)$, se mantiene en estado operativo, i.e. es un sub-grafo conexo.

- Se define Confiabilidad en Nodos Residual ($Residual\ Node\ Reliability$), denotada $R_n(G)$ o simplemente R_n, como la probabilidad que la red esté en estado operativo dado que ocurren fallas en sus componentes.

Node Reliability

- Ejemplo: Consideremos el grafo $K_4 - x$, x una de las aristas cualesquiera de K_4. Supongamos que todos los nodos tienen probabilidad operacional p (fallan con $1 - p$).

- La confiabilidad R_n puede ser calculada considerando todos los estados operacionales para cada uno de las cardinalidades posibles de W.

$\lvert W \rvert$	PROBABILIDAD	NÚMERO DE ESTADOS OPERATIVOS
1	$p \cdot (1-p)^3$	4
2	$p^2 \cdot (1-p)^2$	5
3	$p^3 \cdot (1-p)^1$	4
4	p^4	1

Tenemos entonces:

$$R_n = 4p(1-p)^3 + 5p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p)^1 + p^4.$$

Node Reliability

- Notar que el grafo vacío es considerado un estado de falla en este enfoque.

- Ejemplo: Consideremos el grafo estrella $K_{1,n-1}$.

- Claramente el grafo estrella está operativo sii su centro está operativo o bien el nodo centro falla y todos menos uno de los nodos colgantes fallan.
  Tenemos entonces:

$$R_n(K_{1,n-1}) = p + p(n-1)(1-p)^{n-1}.$$

Node Reliability

Algunos contrastes de complejidad computacional entre el cómputo de $R_e(G)$ (caso de falla en aristas) y $R_n(G)$ (caso de falla en nodos):

- Considerando el grafo completo K_n con probabilidades arbitrarias de operación en sus aristas, el cálculo de R_e es un problema $NP - Hard$.

- Sin embargo, para el caso nodal, es fácil ver que:

$$R_n(K_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i),$$

con $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Node Reliability

- Considerando un árbol T, el cálculo de R_e es el producto de las confiabilidades de las aristas de T para el caso de fallas en aristas y nodos pefectos.

- Sin embargo, para el caso nodal, el cálculo de $R_n(T)$ depende de la topología de T y puede ser calculada vía un algoritmo de orden $O(n)$.

- En el caso de Arista Confiabilidad con probabilidades de operación de las aristas todas iguales a p, el valor R_e es monótono en p.

- En contraste, en el caso de Nodo Confiabilidad con probabilidades de operación de los nodos todos iguales a p, el valor de R_n no siempre es monótono en p.

Node Reliability

- Por ejemplo, tomando el grafo estrella $K_{1,8}$, se cumple que:
  - $R_n(K_{1,8}, p = 0.2) > R_n(K_{1,8}, p = 0.4)$,
  - $R_n(K_{1,8}, p = 0.4) < R_n(K_{1,8}, p = 0.6)$.

Lema (Moore and Shannon, 1956): *Sea G un grafo 2-conexo cuyas aristas tienen probabilidades iguales a p. Entonces, $R_e(G)$ no solamente es monótono, existe además un valor $p_0 \in (0, 1)$ tal que:*

i) $R_e(G, p) < p$ *para* $0 < p < p_0$.

ii) $R_e(G, p) > p$ *para* $p_0 < p < 1$.

$\Rightarrow$ Notar que del Lema anterior surge que la red es más confiable que cualquier arista simple para $p > p_0$.

Node Reliability

- En Nodo Confiabilidad, si una red falla pues algunos nodos fallan dejandola con dos componentes, entonces la red se tornará operativa si todos los nodos de una de las dos componentes también fallan.

- En Arista Confiabilidad, si una red falla pues un subset F de aristas fallan, entonces la red fallará siempre que cualquier superset de F falle.

TEOREMA (FÓRMULA PIVOT DE MOSKOWITZ): *Dado un grafo G y una arista $e \in G$ con confiabilidad p_e. Entonces, el valor de $R_e(G)$ puede ser calculado mediante la recursión:*

$$R_e(G) = (1 - p_e)R_e(G - e) + p_e R_e(G/e).$$

Node Reliability

- $G - e$ denota el grafo resultante de quitar e de G, y G/e denota el grafo resultante de contraer los extremos de la arista e.

- Se define por $N(v)$ como la vecindad del nodo v, i.e. v con todos sus adyacentes. Se define G/v como el grafo obtenido de $G - v$ agregando una arista entre cada par de vecinos de v no adyacentes entre sí.

TEOREMA (STIVAROS, 1990): *Dado un grafo G donde todos los nodos operan con la misma confiabilidad p. Dado un nodo $v \in G$ con grado d_v, entonces, el valor de $R_n(G)$ puede ser calculado mediante la recursión:*

$$R_n(G) = (1-p)R_n(G-v) + pR_n(G/v) + p[(1-p)^{n-1} - R_n(G-N(v))(1-p)^{d_v}].$$

Node Reliability

DEFINICIÓN (SPLIT GRAPHS): Si los nodos de $G = (V, E)$ puden ser particionados como $V = W \cup \bar{W}$ tal que $G(W)$ no tiene aristas y $G(\bar{W})$ es completo, entonces decimos que G es un *Split Graph*.

DEFINICIÓN (THRESHOLD GRAPHS): un grafo Split G que además satisfaga la propiedad:

$$d_u \leq d_v \Longrightarrow (N(u) - u) \subseteq N(v), \forall u, v \in W,$$

se le denomina *threshold graph*.

TEOREMA (STIVAROS, 1990): *Si G es un grafo threshold con n nodos y donde todos los nodos tienen confiabilidad p y las aristas son perfectas, entonces, $R_n(G)$ puede computarse con órden $O(n)$.*

Node Reliability

$\Rightarrow$ Sorprendentemente el resultado anterior no es cierto para la clase de grafos Split como lo dice el siguiente teorema.

TEOREMA (SUTNER-SATYANARAYANA-SUFFEL, 1991): *El cálculo de $R_n(G)$ es un problema NP-Completo para grafos Split.*

- Existen algunas subclases de grafos planares en donde, en el caso de Arista Confiabilidad, el valor $R_e(G)$ puede computarse en órden polinomial.

- Sin embargo en el caso más general de grafos planares tanto $R_e(G)$ como $R_n(G)$ no son computables en órden polinomial.

Node Reliability

Los siguientes resultados muestran que en el caso de grafos planares bipartitos tanto $R_e(G)$ como $R_n(G)$ no son computables polinomialmente.

TEOREMA (VERTIGAN): *El cálculo de $R_e(G)$ es un problema NP-Completo para grafos planares bipartitos.*

TEOREMA (SUTNER-SATYANARAYANA-SUFFEL, 1991): *El cálculo de $R_n(G)$ es un problema NP-Completo para grafos planares bipartitos.*

$\Rightarrow$ A continuación veremos otras clases de grafos para las cuales se conoce la complejidad computacional de computar $R_n(G)$. Previamente se introducen algunas definiciones.

Node Reliability

DEFINICIONES:

- Una arista con extremos u y v es *subdividida* si es reemplazada por un nodo w de grado 2 adyacente a u y v. Las nuevas aristas (u, w) y (w, v) se dice que están *en serie*.
- Dos grafos se dice que son *homeomóficos* si pueden ser obtenidos de un mismo grafo a partir de una secuencia de *subdivision* de aristas.
- La inversa de la subdivisión, se llama *reducción en serie* y consiste en reemplazar un nodo de grado 2 adyacente a u y v por la arista (u, v).
- Si un grafo puede tener más de una arista entre pares de nodos, se dice que es un *multigrafo*. Las aristas que tienen los mismos extremos se llaman *aristas paralelas*.

Node Reliability

DEFINICIÓN (GRAFO SERIE-PARALELO):

- Un multigrafo se dice que es *serie-paralelo* si puede ser reducido a un grafo sin aristas por las siguientes operaciones:

  i) Eliminar un nodo de grado 1,
  ii) Eliminar una arista paralela, o
  iii) Realizar una reducción en sere.

TEOREMA (DUFFIN, 1965): *Un grafo es serie-paralelo sii no contiene ningún subgrafo inducido que sea homeomófico a* K_4 *(grafo completo de 4 nodos).*

Node Reliability

TEOREMA (COLBOURN ET AL., 1990): *Sea G un multigrafo donde cada nodo tiene probabilidad de operación igual a p, entonces, $R_n(G)$ puede computarse mediante un algoritmo polinomial.*

DEFINICIÓN (COGRAFO): Se define un Cografo en forma recursiva como sigue:

i) Un nodo aislado es un cografo.

ii) La unión $G_1 \cup G_2$ de dos cografos G_1 y G_2 es un cografo.

iii) El *join Zykov* $G_1 + G_2$ (i.e. agrego aristas entre todo nodo de G_1 con cada nodo de G_2) de dos cografos G_1 y G_2 es un cografo.

Node Reliability

DEFINICIÓN (GRAFO c-DENSO): Sea c un entero positivo. Se dice que un grafo G es $c-denso$ si todo subgrafo inducido $H \subseteq G$ tiene grado máximo $\triangle(H)$ al menos tan grande como el número de nodos de H menos c.

TEOREMA (COBOURN-SATYANARAYANA-SUFFEL-SUTNER, 1991): *Fijado un entero positivo c, la clase de grafos c−densos admite un algoritmo polinomial de orden $O(n^2)$ para calcular $R_n(G)$ cuando los nodos $v_i \in V$ operan con probabilidad p_i y un algoritmo polinomial de orden $O(n+e)$ cuando todas las p_i son iguales a p.*

PROPIEDAD: Como el mínimo grado de un grafo planar es a lo sumo 5, los complementos de grafos planares son $6-$densos.

Node Reliability

⇒ Si bien sabemos que los grafos planares no admiten algoritmos polinomiales para computar $R_n(G)$, el teorema anterior establece que una clase de grafos que incluye los complementos de todos los grafos planares admite un algoritmo polinomial para computar $R_n(G)$.

DEFINICIÓN (GRAFO UNIFORMENTE OPTIMAL): Un grafo H es *uniformemente optimal* si

$$R_n(H) \geq R_n(G),$$

para todo grafo G con n nodos, e aristas, y probabilidad de operación de los nodos igual a p, $p \in (0, 1)$.

Node Reliability

⇒ Si bien pareciera que la condición de optimalidad uniforme es muy restrictiva, existen algunos casos donde propiedad se satisface bajo ciertas condiciones. En tal sentido, se mencionan los siguientes resultados.

TEOREMA:
(A) El grafo "estrella" es uniformemente optimal para $e = n - 1$*.*
(B) El grafo completo menos un "matching" es un grafo uniformemente optimal.

TEOREMA (BERMOND): *Grafos multipartitos completos regulares (o a lo sumo regulares) son uniformemente optimales.*

Bibliografía.

References

[1] C. J. Colbourn, “The Combinatorics of Network Reliability”, ISBN 0-19-504920-9, Oxford University Press, Inc., New York, USA, 1987.

[2] F. Boech, A. Satyanarayana, and C. Suffel, “On Residual Connectedness Network Reliability”, 1052-1798/91, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 5, 1991.

[3] D. Bilka and J. Bechta Dugan, "Network s-t Reliability Bounds Using a 2 Dimensioning Reliability Polynomial", 0018-9529/94, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 43, No. 1, March 1994.

[4] Don Torrieri, "Calculation of Node-Pair Reliability in Large Networks with Unreliable Node Vertex Cutsets of Undirected Graphs", IEEE Transactions on Reliability, Vol. 43, No. 3, September 1994.

[5] Patvardhan, V.C. Prasad, and V. Prem Pyara, "Vertex Cutsets of Undirected Graphs", 0018-9529/95, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 44, No. 2, June 1995.