# Modelos Combinatorios de Confiabilidad en Redes.

Dr. Ing. Franco Robledo (Responsable del Curso)
IMERL/Dpto. de Investigación Operativa (INCO) - UDELAR
Montevideo, Uruguay.

Curso de Postgrado, marzo de 2009

Facultad de Ingeniería - UDELAR

Segundo Set de Transparencias.

# Confiabilidad Estadística Estructural

- En el estudio de Confiabilidad de un Sistema es interesante introducir el factor tiempo en el análisis, lo que constituye el objeto de los Modelos Estadísticos. Se busca contestar preguntas tales como:
  - ¿Cuánto tiempo es esperable que éste sitema no falle?. Esto, tomando en cuenta un factor fundamental que es el envejecimiento de sus componentes.
  - ¿Cuál es el tiempo de vida de este componente?. ¿En cuanto tiempo se registrará su primera falla?.
  - Dada una falla, ¿Cuánto demorará en producirse la siguiente?.

- Se introduce el concepto de **tiempo de vida** o **lifetime** que es el tiempo aleatorio desde el comienzo de operación o funcionamiento hasta que aparezca una falla luego de la cual es imposible continuar operando (**muerte** o **death**).

# Confiabilidad Estadística Estructural

- Si $\tau$ representa el tiempo de vida de un componente, la probabilidad de que opere sin fallas durante un cierto tiempo $t_0$ estaría dada por: $R(t_0) = P(\tau > t_0)$.

- En muchos casos existe la posibilidad de reparar componentes fallados de forma tal de mantener el sistema en funcionamiento y entonces es interesante manejar nuevas variables que permitan modelar más exactamente la realidad.

- Sería importante considerar además del tiempo de primera falla del sistema, la probabilidad de que en un cierto tiempo $t$ el sistema se encuentre en un estado operacional, $Av(t)$, e incluso considerar en el caso límite que $t$ tiende a infinito, $Av$.

# Confiabilidad Estadística Estructural

- El objetivo de los estudios estadísticos de confiabilidad es permitir una precisa inferencia estadística de un sistema y de sus tiempos de vida.

- No siempre es posible o aplicable realizar tests con el fin de determinar exactamente tiempos de vida, como ocurre cuando es necesario por razones de mercado lanzar un producto rápidamente a la venta y no se puede esperar hasta agotar todos los testeos.

- La determinación de la Confiabilidad de un Sistema (sistema en un sentido amplio, no solo el de sistemas de telecomunicaciones) en función de la confiabilidad de sus componentes es el tema de estudio de la confiabilidad estructural.

# Confiabilidad Estadística Estructural

- El estudio de la confiabilidad de un sistema puede considerarse desde un punto estructural en el que se toma en cuenta su organización y donde la probabilidad de falla estará determinada por la probabilidad de no supervivencia de sus componentes.

- Estos estudios se basa en el estado binario (funciona o no funciona) de los componentes y en la definición de una función de estructura que vincule el estado operacional de los mismos con el del sistema, que a su vez sólo puede presentar los mismos valores de operación.

- El enfoque estructural es la expresión más amplia del estudio clásico de la Confiabilidad, por lo que los conceptos que se presentarán aparecen posiblemente en todos los modelos (como los de *Network Reliability*), aunque adaptados a cada caso.

# Confiabilidad Estadística Estructural

- Consideraremos dos clases de objetos: **componentes** (o elementos) y **sistemas** (o estructuras).

- El estado del componente $i-$ésimo estará dado por la variable binaria $x_i$ que valdrá uno si dicho elemento se encuentra en un estado operativo, y cero en caso contrario.

- El estado del sistema quedará completamente determinado por el estado de sus componentes, a través de la **función de estructura** $\Psi(X)$ donde $X$ es un **vector de estado** representando el estado de cada elemento del sistema, siendo $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\Psi(X) = 1$ si el sistema está funcionando y $\Psi(X) = 0$ si no está operando.

# Confiabilidad Estadística Estructural

DEFINICIÓN: $X \leq Y$ si se cumple que $\forall i, i \in 1 \dots n$, $x_i \leq y_i$ siendo $X = (x_1, \dots, x_n)$ y $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

DEFINICIÓN: $X < Y$ si se cumple que $X \leq Y$ y existe $i$, $i \in 1 \dots n$, tal que $x_i < y_i$.

DEFINICIÓN (FUNCIÓN DE ESTRUCTURA MONÓTONA): Una función de estructura $\Psi(X)$ se dice monótona cuando verifica:

1. $\Psi(X)(0, , 0, \dots, 0) = 0$.

2. $\Psi(X)(1, , 1, \dots, 1) = 1$.

3. $\Psi(X) \leq \Psi(Y)$ si $X < Y$.

# Confiabilidad Estadística Estructural

Definición (Sistema Monótono): Un sistema es monótono cuando su función de estructura es una función monótona.

- De estas definiciones vemos que si un sistema es monótono su estado no empeora si el estado de algún componente mejora, y además vemos que el sistema no es operativo si todos sus elementos no lo son pero sí lo será si todos sus componentes se encuentran en funcionamiento. Intuitivamente vemos que es válido definir un orden parcial sobre los vectores de estado en función de los estados de sus componentes.

Definición (Path Vector): Un vector de estado $X$ se dice **path vector** si $\Psi(X) = 1$. El conjunto $A(X) = \{i|x_i = 1\}$ recibe el nombre de **path set**. Si además se verifica que $\Psi(Y) = 0$, $\forall Y < X$, entonces $X$ constituye un **minimal path vector** y $A(X)$ un **minimal path set**.

# Confiabilidad Estadística Estructural

- Los **path sets** constituyen conjuntos de componentes cuyo funcionamiento garantiza el funcionamiento del sistema total, simplificando la determinación, a partir de un vector de estados dado, de la estructura según se encuentren en operación o no los componentes de algún **path set**.

TEOREMA: *Sea $A_1, A_2, \ldots, A_l$ el conjunto de los minimal path sets del sistema. Entonces:*

$$\Psi(X) = max_{1 \leq j \leq l} \prod_{i \in A_j} x_i.$$

# Confiabilidad Estadística Estructural

- Una consecuencia importante del teorema anterior es que cualquier sistema monótono puede ser representado como una conexión paralela de los minima paths sets colocados en serie.

DEFINICIÓN (CUT VECTOR): Un vector de estado $X$ se dice **cut vector** si $\Psi(X) = 0$. El conjunto $C(X) = \{i | x_i = 0\}$ recibe el nombre de **cut set**. Si además se verifica que $\Psi(Y) = 1$, $\forall Y > X$, entonces $X$ constituye un **minimal cut vector** y $C(X)$ un **minimal cut set**.

- El concepto detrás de los **cut set** consite en un conjunto de componentes cuya falla determina la falla de todo el sistema por lo que, dada una distribución de estados de componentes, puede determinarse fácilmente el estado operativo del sistema.

# Confiabilidad Estadística Estructural

TEOREMA: *Sea $C_1, C_2, \ldots, C_m$ el conjunto de todos los minimal cut sets del sistema y sea:*

$$\delta_j(X) = \begin{cases} 1, & \textit{si al menos un elemento } C_j \textit{ se encuentra en funcionamiento} \\ 0, & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

*Entonces:*

$$\Psi(X) = \prod_{j=1}^{m} \delta_j(X) = \prod_{j=1}^{m} max\{x_i, i \in C_j\}.$$

$\Rightarrow$ Este resultado implica que cualquier sistema monótono puede ser representado como una conexión serial de estructuras paralelas correspondientes a los minimal cut set; esto es la aplicación de una simplificación por aplicación de particionamiento en subsistemas que operan como componentes simples y que reciben el nombre de MÓDULOS.

# Confiabilidad Estadística Estructural

NOTACIÓN: Para formalizar estos conceptos de particionamiento es preciso introducir una nueva notación:

$$S = \{1, 2, 3, ..., n\},\ S = \bigcup_{i=1}^{m} M_i, \text{ con } M_i \cap M_j = \emptyset,\ \forall i \neq j,$$

esto es: al sistema $S$ compuesto por los elementos $1..n$ se le particiona en **Módulos** independientes $M_i$.

DEFINICIÓN (SISTEMA MODULARIZADO): Sea $s = s(\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_m)$ una función de estructura binaria monótona. Si la función de estructura del sistema $\Psi(X)$ puede ser representada como: $\Psi(x) = s\left(\Psi_1(X^{M_1}), \Psi_2(X^{M_2}), ..., \Psi_m(X^{M_m})\right)$, con $M_i \cap M_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{m} M_i = S$, entonces el sistema es un **sistema modularizado**. Los $M_i$ son llamados **módulos** y a $s$ se le denomina **función organizadora de la estructura**.

# Confiabilidad Estadística Estructural

Veremos seguidamente Confiabilidad de un Sistema con Componentes independientes y no renovables.

- Asumamos que cada componente $i$ tiene una probabilidad $p_i$ de encontrarse en funcionamiento, con lo cual el estado del $i-$ésimo componente estará dado por una variable aleatoria binaria del valor:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p_i \\ 0, & \text{con probabilidad } 1 - p_i. \end{cases}$$

- De esta forma resulta que: $\Psi(X) = \Psi(x_1, x_2, ..., x_n)$ es una variable aleatoria binaria y la confiabilidad $r$ del sistema estará determinada por la probabilidad de que $\Psi(X) = 1$:

$$r = P(\Psi(X) = 1) = E(\Psi(X)).$$

# Confiabilidad Estadística Estructural

- Dado que se asumió que todas las componentes son mutuamente independientes, la distribución conjunta de las variables aleatorias de estado queda completamente determinada por las confiabilidades de los respectivos estados y por tanto $r = r(p_1, p_2, ..., p_n)$.

TEOREMA: *Sea $r = r(P)$ la expresión de la confiabilidad de un sistema monótono formado por componentes independientes. Entonces $r(P)$ es una función creciente del vector de probabilidades $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$.*

- Se tiene que: $r(P) = p_i \cdot r(1_i; P) + (1 - p_i) \cdot r(0_i; P)$, donde la notación $(\alpha_i; v)$ representa al vector $v$ donde se sustituyó la $i-$ésima componente por el valor $\alpha$.

# Confiabilidad Estadística Estructural

- Hasta ahora se ha trabajado sin considerar el pasaje del tiempo. A partir de ahora lo haremos bajo las siguientes hipótesis:
  - El componente $i-$ésimo tiene tiempo de vida $\tau_i$ con distribución $F_i(t)$, $i = 1..n$, $P(\tau_i \geq 0) = 1$.
  - Un componente que falla no se sustituye ni se repara.

- Se define una variable aleatoria $X_i(t) = 1 \Leftrightarrow \tau_i > t$, con lo cual $X(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ y el tiempo de vida del sistema $\tau$ queda determinado por la primera entrada del mismo en un estado de falla, esto es:
$$\tau = inf\{t|\Psi(X(t)) = 0\}.$$

## Confiabilidad Estadística Estructural

TEOREMA: *Sea* $r(p) = E(\Psi(X))$ *la confiabilidad de un sistema monótono. Entonces la probabiliad* $R(t)$ *de que el tiempo de vida del sistema exceda a* $t$ *está dado por:*

$$R(t) = P(\tau > t) = r(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \ldots, \bar{F}_n(t)),$$

*donde* $\bar{F}_i(t) = 1 - F_i(t)$.

COTAS A LA CONFIABILIDAD DE UN SISTEMA: A pesar del hecho de que se han encontrado expresiones explícitas que permitirían efectuar los cálculos exactos de la confiabilidad de un sistema, para casos complejos dichos cálculos serían impracticables debido al elevado tiempo de ejecución de tales algoritmos. Una posibilidad en estos casos es emplear cotas al valor del la confiabilidad del sistema que permitan un nivel de aproximación aceptable en un tiempo menor.

# Confiabilidad Estadística Estructural

Método de Inclusión y Exclusión:

Consideremos que un cierto evento $E$ es la unión de eventos $E_1$, $E_2$, ..., $E_m$, i.e. $E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$.

Sean:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m} P(E_i),\ S_2 = \sum_{i<j} P(E_i, E_j),\ \ldots,$$
$$S_r = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(\bigcap_{j=i}^{j=r} E_{ij}).$$

Fórmula de Inclusión-Exclusión: $P(E) = \sum_{r=1}^{r=m} (-1)^{r-1} S_r$, donde las sumas parciales verifican: $P(E) \leq S_1$, $P(E) \geq S_1 - S_2$,..., $P(E) \leq S_1 - S_2 + S_3$,....

Apliquemos esta relación a la estimación de las cotas que buscamos.

# Confiabilidad Estadística Estructural

Sean los minimal cut sets $C_1$, $C_2$, ...., $C_m$ y definamos el evento:

$$E_i^* = \{\text{Todos los componentes de } C_i \text{ fallaron}\}.$$

Entonces: $1 - r(P) = P(\bigcup_{i=1}^{i=m} E_i^*)$. Sea $L_1^* = \sum_{i=1}^{m} P(E_i^*)$. Aplicando la relación mencionada se obtiene la siguiente suceción de cotas:

$$L_2^* = L_1^* - \sum_{i<j} P(E_i^* E_j^*) \leq 1 - r(P) \leq L_1^*,$$

Con lo cual: $1 - r(P) \leq L_2^* + \sum_{i<j<k} P(E_i^* E_j^* E_k^*) = L_3^*$.
De donde se deduce:

$$P(E_i^*) = \prod_{j \in C_i} q_j,\ P(E_i^* E_j^*) = \prod_{l \in C_i \cup C_j} q_l, ...., \text{con } q_i = 1 - p_i.$$

# Confiabilidad Estadística Estructural

Método de Cuts and Paths:

Sea $A_1$, $A_2$,..., $A_l$ el conjunto de *minimal path sets* de un sistema monótono y sea $\tilde{E}_i$ el evento: $\{$al menos una componente de $A_i$ falló$\}$. Entonces:

$1 - r(P) = P(\bigcap_{j=1}^{j=l} \tilde{E}_j) = P(\tilde{E}_1) \cdot P(\tilde{E}_2|\tilde{E}_1) \cdot \ldots \cdot P(\tilde{E}_l| \bigcap_{j=1}^{j=l-1} \tilde{E}_j)$.

Lema: $P(\tilde{E}_k| \bigcap_{i=1}^{i=k-1} \tilde{E}_i) \geq P(\tilde{E}_k)$, $2 \leq k \leq m$.

Si $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \emptyset$ entonces vale la igualdad. Si su intersección es no vacía implica que se incrementa la probabilidad de $\tilde{E}_k$. Combinando los resultados anteriores tenemos:

$$r(P) \leq 1 - \prod_{i=1}^{i=l} \left(1 - \prod_{j \in A_i} p_j\right).$$

# Confiabilidad Estadística Estructural

Sea ahora el conjunto de minimal cuts $C_1$, $C_2$,..., $C_m$ y
$\hat{E}_i = \{$al menos un elemento de $C_i$ funciona$\}$. Entonces:
$r(p) = P(\bigcap_{j=1}^{j=m} \hat{E}_j) = P(\hat{E}_1) \cdot P(\hat{E}_2 | \hat{E}_1) \cdot \ldots \cdot P(\hat{E}_m | \bigcap_{j=1}^{j=m-1} \hat{E}_j)$.

Lema: $P(\hat{E}_k | \bigcap_{i=1}^{i=k-1} \hat{E}_i) \geq P(\hat{E}_k)$, $2 \leq k \leq m$.

Combinando los resultados anteriores obtenemos la cota inferior:

$$LB^* = \prod_{i=1}^{m} \left( 1 - \prod_{j \in C_i} (1 - p_j) \right) \leq P \left( \bigcap_{i=1}^{i=m} \hat{E}_i \right) = r(P).$$

# Confiabilidad Estadística Estructural

De esta forma hemos logrado acotar superior e inferiormente el valor de la confiabilidad del sistema de la siguiente manera:

$$\prod_{i=1}^{m}\left(1-\prod_{j\in C_i}(1-p_j)\right)\leq r(P)\leq 1-\prod_{i=1}^{i=l}\left(1-\prod_{j\in A_i}p_j\right).$$

- Podemos interpretar esta última expresión como que $r(P)$ está acotada inferiormente por la confiabilidad de un sistema ficticio en el cual cada $minimal\ cut\ set$ del sistema original es un subproblema paralelo independiente y cada uno de los subsistemas está replicado independientemente. Esta interpretación es totalmente análoga y aplicable para el caso de la cota superior.

# Confiabilidad Estadística Estructural

## Descomposición Modular:

La descomposición modular permite determinar con mayor precisión una cota inferior al cálculo de la confiabilidad de un sistema, lo cual tiene un interés práctico considerable.

Denotemos por $p_i^*$ la probabilidad de que el modelo $i$ esté operando $(1 \leq i \leq m)$. A partir de la definición de Sistema Modularizado podemos deducir que la confiabilidad del sistema está dada por:

$$r(P) = E\left[s\left(\Psi_1(X^{M_1}), \Psi_2(X^{M_2}), \ldots, \Psi_m(X^{M_m})\right)\right] = r_M(p_1^*, \ldots, p_M^*).$$

Si cada uno de los módulos fuera tratado como un sistema independiente, podrían establecerse cotas inferiores a sus respectivas confiabilidades.

# Confiabilidad Estadística Estructural

Sean $LB(i)$ dichas cotas y consideremos:

$$LB(M) = r_M\left(LB(1), \ldots, LB(m)\right).$$

Obviamente: $r(P) \geq LB(M)$. Calculemos ahora una nueva cota inferior para $r(P)$ en orden inverso, es decir, asumiendo que los valores exactos de confiabilidad de los módulos $p_i^*$ son conocidos. Cada módulo se trata como un elemento distinto y una cota como la calculada previamente se determina para el sistema cuya función de estructura está dada por:

$$s\left(\Psi_1(X^{M_1}), \Psi_2(X^{M_2}), \ldots, \Psi_m(X^{M_m})\right)$$

Si denotamos la cota inferior correspondiente con $LB(\Psi)$, por aplicación del siguiente teorema, se puede concluir que tanto $LB(M)$ como $LB(\Psi)$ son mejores cotas de $r(P)$ que $LB^*$.

# Confiabilidad Estadística Estructural

TEOREMA (BODIM):

$$r(P) \geq \max\{LB(M), LB(\Psi)\} \geq LB^*.$$

MÉTODO DE REEMPLAZO:

Los métodos descritos anteriormente permiten buenas cotas a la confiabilidad del sistema pero la desventaja de que requieren que se conozcan todos los *minimal cut sets* o *path sets* del sistema, o de sus módulos, lo que es un problema complejo para sistemas grandes.

Un método alternativo como el de *Reemplazo*, si bien es más eficiente, no ofrece tanta exactitud en los resultados obtenidos, aunque es considerablemente bueno en aquellos casos donde los componentes del sistema tienen confiabilidades cercanas a la unidad.

## Confiabilidad Estadística Estructural

Asumamos que los tiempos de vida de los componentes son $\tau_i \approx e^{\lambda_i}$, con $1 \leq i \leq n$. Sea $r_{min}$ el tamaño (habitualmente el número de elementos) del $cut\ set$ mínimo, $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ y $\tau$ el tiempo de vida del sistema. Con esta notación, se introduce el siguiente teorema.

TEOREMA:

$$P(\tau > t) = R(t) \geq e^{-\Lambda t} \sum_{k=0}^{r_{min}-1} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}.$$

- El método recibe su nombre (Reemplazo) porque en la prueba del teorema anterior se utiliza un sistema imaginario que reemplaza al original y sirve de cota dado que se deteriora más rápido que éste.

# Confiabilidad Estadística Estructural

## Aproximación a la confiabilidad de un sistema con componentes altamente confiables:

Consideremos sistemas monótonos con componentes independientes y no renovables. Asumiremos que los componentes tienen una alta confiabilidad, lo que se formaliza con:

- La confiabilidad $p_i$ del i-ésimo componente, $i = 1, ..., n$, verifica $p_i = 1 - q_i = 1 - \alpha\theta_i$, con $\alpha \to 0$.

- El tiempo de vida del i-ésimo componente, $\tau_i \approx Exp(\lambda_i)$, $\lambda_i = \alpha\theta_i$, con $\alpha \to 0$.

Expresamos con $\alpha \to 0$ la baja probabilidad de falla de los componentes.

# Confiabilidad Estadística Estructural

- Dado un vector de estado $X$, sea $B(X) = \{i|x_i = 1\}$, $D(X) = \{i|x_i = 0\}$, $|B(X)|$, y $|D(X)|$ representa el número de elementos en los conjuntos $B(X)$ y $D(X)$ respectivamente.

TEOREMA: *Sea $b$ el tamaño del menor cut set del sistema. Entonces:*

$$r(P) = 1 - \sum_{k=b}^{n} \left( \sum_{\{X:\Psi(X)=0,|D(X)|=k\}} \prod_{i \in B(X)} p_i \cdot \prod_{i \in D(X)} (1 - p_i) \right),$$

$$r(P) = 1 - \alpha^b g(\theta) + O(\alpha^{b+1}) \approx Exp(-\alpha^b g(\theta)),$$

*donde* $g(\theta) = \sum_{\{X:\Psi(X)=0,|D(X)|=k\}} \prod_{i \in B(X)} \theta_i$.

# Bibliografía.

## References


[1] C. J. Colbourn, "The Combinatorics of Network Reliability", ISBN 0-19-504920-9, Oxford University Press, Inc., New York, USA, 1987.

[2] F. Boech, A. Satyanarayana, and C. Suffel, "On Residual Connectedness Network Reliability", 1052-1798/91, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 5, 1991.

[3] D. Bilka and J. Bechta Dugan, "Network s-t Reliability Bounds Using a 2 Dimensioning Reliability Polynomial", 0018-9529/94, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 43, No. 1, March 1994.

[4] Don Torrieri, "Calculation of Node-Pair Reliability in Large Networks with Unreliable Node Vertex Cutsets of Undirected Graphs", IEEE Transactions on Reliability, Vol. 43, No. 3, September 1994.

[5] Patvardhan, V.C. Prasad, and V. Prem Pyara, "Vertex Cutsets of Undirected Graphs", 0018-9529/95, IEEE Transactions on Reliability, Vol. 44, No. 2, June 1995.