Modelos Combinatorios de Confiabilidad en Redes.

Dr. Ing. Franco Robledo (Responsable del Curso)
IMERL/Dpto. de Investigación Operativa (INCO) - UDELAR
Montevideo, Uruguay.

Curso de Postgrado, marzo de 2009

Facultad de Ingeniería - UDELAR

TERCER SET DE TRANSPARENCIAS.

Método Monte-Carlo para el Cálculo de la Confiabilidad

- Dado que el cálculo de la confiabilidad de una red es, en general, de orden exponencial, es necesario recurrir a otro tipo de métodos para efectuar dicho cálculo en caso de grafos que, por su tamaño, harían absolutamente impracticable la aplicación de un método exacto.

- La familia de métodos MonteCarlo se basa en la generación de estados del sistemas y en el calculo de la medida deseada por estimación de su valor devolviendo, también, la varianza del estimador empleado. Son métodos muy utilizados en el campo de la Investigación Operativa, y son, en general, relativamente fáciles de aplicar e implementar.

- El Método MonteCarlo Crudo, ejemplar básico de dicha familia, es muy sencillo de comprender y de llevar la práctica, pero no ofrece "márgenes de error" suficientemente pequeños en la mayoría de los casos.

Método Monte-Carlo Crudo

- Lo anterior lleva a que junto con los Métodos MonteCarlo se apliquen Métodos de Reducción Varianza que, basados en el método MonteCarlo original, obtienen mejor precisión con el mismo esfuezo computacional.

Método MonteCarlo Crudo: El método consiste en generar N pseudo-replicaciones del grafo aleatorio, obteniendo N vectores de estado independientes entre sí: $\bar{X}^1$, $\bar{X}^2$, ..., $\bar{X}^N$. Luego se toma como estimador:

$$\bar{R}_K(G) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f(\bar{X}^i)}{N},$$

donde $f(\bar{X}^i)$ es uno si el grafo inducido por el vector de estado $\bar{X}^i$ es conexo, cero si no.

Método Monte-Carlo Crudo

- La generación de los vectores de estado se realiza sorteando para cada elemento un valor aleatorio v en el intervalo $[0, 1]$ y comparando dicho número con la probabilidad del elemento considerado, p_i. De esta forma:

$$\bar{X}^i = \begin{cases} 1, & \text{si } v \leq p_i \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- La varianza de este estimador es:

$$V(\bar{R}_K(G)) = \frac{R(1-R)}{N},$$

estimada por:

$$\bar{V} = \frac{\bar{R}_K(G)(1-\bar{R}_K(G))}{N-1}.$$

Método Monte-Carlo Crudo

- En este estado "crudo", el método es computacionalmente lento y presenta una varianza poco aceptable, pero como se dijo anteriormente es base de otros algoritmos que se utilizan para obtener mejor precisión.

MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE VARIANZA: Este tipo de métodos consiste en emplear diversas técnicas de muestreo que permiten obtener una reducción de la varianza en los Métodos Monte-Carlo. Ejemplo de esto son: variables de control; variables antitéticas; muestreo estratificado; muestreo según importancia.

$\Rightarrow$ El procedimiento general de estos métodos consiste en hacer sucesivas corridas de un algoritmo del estilo de Monte-Carlo, para luego calcular el estimador en función de la media de los resultados obtenidos. Por su concepción, estos métodos mejoran la varianza obtenida, logrando mejores resultados con la misma cantidad de replicaciones.

Métodos Reducción de Varianza - Método Antitético

- El muestreo antitético se concentra en la manipulación de la secuencia (torrente) de variables aleatorias uniformes con el objetivo de producir una reducción de varianza en el estimador de la confiabilidad.

- Supongamos que deseamos estimar un parámetro Ω en el proceso de interés. Si S_i es una estimación imparcial de Ω en la réplica j-ésima, entonces nuestro estimador sobre k réplicas es: $\bar{S}_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} S_j$, con varianza:

$$var(S_k) = \frac{1}{k}\left[\sum_{j=1}^{k} var(S_j) + 2\sum_{i\neq j}^{k} cov(S_i, S_j)\right]. \qquad (1)$$

Métodos Reducción de Varianza - Método Antitético

- Si las réplicas son independientes desaparecen los términos de covarianza. Sin embargo, si hacemos negativa la suma de covarianzas, podemos pruducir una varianza menor que la que ofrecen réplicas independientes.

- El introducir correlación (covarianza) negativa entre los resultados de diferentes réplicas es una estrategia para obtener respuestas estadísticamente más confiables que la generada con réplicas independientes.

- Para el caso de variaciones antitéticas, la estrategia es introducir correlación negativa entre los elementos correspondientes a las cadenas de números aleatorios utilizados en las distintas réplicas.

Métodos Reducción de Varianza - Método Antitético

- La variante o forma más usual del Método Antitético consiste en tomar una secuencia de variables aleatorias uniformes en $[0,1]$ a la que notaremos $u_1,\ldots,u_n$ para generar una réplica y $(1-u_1),\ldots,(1-u_n)$ para generar la correspondiente secuencia de entradas para la segunda réplica.

- De esta elección se desprende que las secuencias están correlacionadas negativamente, lo cual impulsa a estudiar teórica y/o prácticamente la relación existente entre: $\Omega(u_1,\ldots,u_n)$ y $\Omega((1-u_1),\ldots,(1-u_n))$ con el objetivo de ver que también presentan correlación negativa, lo cual implica covarianza negativa y por consiguiente reducción de varianza (ver formula (1)).

Métodos Reducción de Varianza - Método Antitético

- La motivación de este método es de que si la desviación inherente a la simulación generada con una secuencia de números hace que la media de las observaciones m_u se desvíe substancialmente de la media verdadera m, es de esperar que en si se toman los valores antitéticos (opuestos) para una nueva simulación se obtendrá una media $m_{(1-u)}$ tal que se distancia de m en forma opuesta a la de m_u.

- Esto ocurre si se verifica que la covarianza existente entre los resultados de las simulaciones es efectivamente negativa, lo cual implica que se logra la reducción de varianza deseada.

Métodos Reducción de Varianza - Método Antitético

- Entonces, si tomamos tanto los valores originales como sus antitéticos para generar observaciones aleatorias y hacemos la media muestral combinada, se debe obtener una estimación más precisa de la media real.

- Para muchos tipos de problemas, ésta técnica constituye una estimación mucho más precisa que la obtenida en simulación directa (Monte-Carlo) en el mismo tiempo de ejecución.

- La aplicación del Método Antitético requiere, pues, se verifique la hipótesis de que la utilización de variables antitéticas introducirá correlación negativa en los valores de la función aplicada a secuencias antitéticas.

Métodos Reducción de Varianza - Método Antitético

- El problema que se presenta entonces radica en demostrar dicha hipótesis para el problema en que se quiera aplicar el método.
- Esta hipótesis es cierta para el caso de Modelos de Redes Coherentes (Mohamed El Khadiri and Gerardo Rubino, 1992).
- Se han realizado aplicaciones del método para el caso de nodos con prescindencia de demostraciones teóricas que justifiquen la aplicación.

Método Monte-Carlo, Método Antitético y Confiabiliad en Nodos

- El Método Monte-Carlo, ya descrito, se basa en la generación de un conjunto de estados del modelo, a partir de sorteos de situaciones y en la determinación del valor esperado de las variables aleatorias consideradas.

- Veamos el cálculo del $R_n(G)$ vía Monte-Carlo. Se consideran los siguientes elementos, para el caso del un grafo $G = (V, E)$.
  - p_i: probabilidad de que el nodo $i-$ésimo se encuentre operativo.
  - X_i: vectores de estado de $n = |V|$ componentes donde
    $X_{i_j} = \begin{cases} 1, & \text{si el nodo } j \text{ se encuentra operativo} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$
  - C_i: familia de variables aleatorias de Bernoulli donde:
    $C_i = \begin{cases} 1, & \text{si el grafo } i\text{-ésimo es conexo} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

Método Monte-Carlo, Método Antitético y Confiabiliad en Nodos

- Teniendo esto en cuenta, resulta que el valor de la confiabilidad se puede calcular como el valor esperado de la familia de variables aleatorias C_i; es decir:

$$\bar{C} = R(G) = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} C_i}{N},$$

  y la varianza se puede calcular como:

$$Var(C) = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (C_i - \bar{C})^2}{N-1}.$$

Método Monte-Carlo, Método Antitético y Confiabiliad en Nodos

- Manteniendo en vista lo anterior, resulta que el pseudocódigo del Método Monte-Carlo sería:

```
Método Monte-Carlo;
Input: G = (V, E);
   Para cada replicación (1..N):
     Sortear estado de los nodos;
     Si el grafo resultante es conexo:
       Incrementar nro. de aciertos;
   Fin_para;
   R = Aciertos/Replicaciones;
   Calcular varianza Var;
  return (R, Var);
```

Figure 1: Monte Carlo-Crudo.

Método Monte-Carlo, Método Antitético y Confiabiliad en Nodos

- Seguidamente se muestra el pseudocódigo del Método Antitético para el cálculo de la confiabilidad en el caso de fallas en nodos.

- El algoritmo recibe como parámetros un grafo G, en el cual las aristas no fallan y para cada nodo $v \in V$, éste se mantiene operativo con probabilidad p_v.

- Otro parámetro a pasar es el número de replicaciones r a realizar.

Método Monte-Carlo, Método Antitético y Confiabiliad en Nodos

Método Antitético para $R_n(G)$:

i) En cada replicación se sortea para cada nodo un valor en $[0,1]$, para determinar si dicho nodo permanece o no activo, guardándose en un vector de estados, el estado de cada uno de los nodos (0-inactivo, 1-activo). De la misma forma se almacena en otro vector de estados, el estado de los nodos resultante de los valores antitéticos. Estos dos vectores de estados determinan dos subgrafos G_1 y G_2 de G.

ii) El estado de conexión de G_1 y G_2 determinan los valores para las variables aleatorias de Bernoulli C_1 y C_2 respectivamente ($C_i = 1$, $i = 1, 2 \Leftrightarrow G_i$ es conexo). Los valores de dichas variables se almacenan en una tabla del tamaño del número de replicaciones totales. Se calcula además el valor de la variable aleatoria $\bar{C}$ como $\bar{C}[j] = (C_1[j] + C_2[j])/2$, donde $C_1[j]$ y $C_2[j]$ son los valores de C_1 y C_2 en la j-ésima replicación.

Método Monte-Carlo, Método Antitético y Confiabiliad en Nodos

iii) La estimación de la confiabilidad y la varianza del estimador viene dada por los valores:

$$R_n = \sum_{j=1}^{r} \frac{\bar{C}[j]}{r}, \text{ estimador de la confiabilidad y } V = \frac{[V_1 + V_2 + 2Cov(C_1, C_2)]}{4r},$$

la varianza del estimador.

$$V_i = \sum_{j=1}^{r} \frac{(C_i - C[j])^2}{r-1}, i = 1, 2, \text{ las varianzas de las V.A. de Bernoulli } C_1 \text{ y } C_2$$

respectivamente.

Los valores de C_1 y C_2 en la j-ésima replicación vienen dados por:

$$C_i[j] = \begin{cases} 1, & \text{si el grafo residual obtenido en instante j es conexo} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Bibliografía.

References

[1] H. Cancela and M. El Khadiri, "Recursive Path Conditioning Monte Carlo Simulation of Communication Network Reliability", Research Report PI915, IRISA, Rennes, France, Campus de Beaulieu 35042 France, March 1995.

[2] M. El Khadiri and G. Rubino, "A Monte Carlo Method based on antithetic varietes for Network Reliability Computations", Research Report PI626, IRISA, Rennes, France, Campus de Beaulieu 35042 France, 1992.

[3] G.S. Fishman, “A Monte-Carlo sampling plan for estimating network reliability”, Operations Research 34, 1986.

[4] J.M. Hamersley and D.C. Handscomb, “Monte Carlo Methods”, Halsted Press, Wiley & Sons. Inc., New York, 1979.