Curso de Posgrado
Modelos Combinatorios de Confiabilidad en Redes
Obligatorio Final - Edición 2020

Dr. Ing. Franco Robledo Amoza
Dpto. de Investigación Operativa/INCO, IMERL
Facultad de Ingeniría, UDELAR.

Junio de 2020

Problema 1: Dada la red de la Figura 1. Se pide:

i) Asumiendo que los nodos son perfectos y las aristas operan todas con probabilidad p, determinar $R_V(G)$.

ii) Asumiendo que las aristas son perfectas y los nodos operan todos con probabilidad p, determinar $R_n(G)$.

iii) Determinar si existen valores de p tal que $R_V(G) = R_n(G)$.

iv) Para $p \in [\frac{1}{2}, 1]$ plotear el valor de $R_V(G)$ menos el valor de las cotas inferiores dadas por el Teorema de Polesskii, Teorema de Ramanathan-Colbourn, y Teorema de Lomonosov-Polesskii.

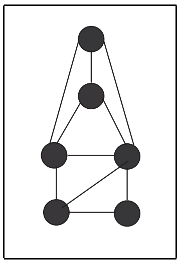

Figura 1: Red 1.

Problema 2: Dada la Red 2 de la Figura 2 donde los nodos negros son terminales de un conjunto K. Se pide:

i) Asumiendo que los nodos son perfectos y las aristas operan todas con probabilidad p. Aplicar el algoritmo FACT para computar $R_K(G)$.

ii) Existe una propuesta diferente de diseño donde se presenta la topología Red 3 de la Figura 2 como alternativa a la Red 2, con nodos perfectos y aristas que operan con probabilidad p. Para esta red, ¿existe p tal que $R_K(G)$ es superior que en (i)?.

iii) Ahora, para la Redes 2 y 3, asumiendo que los nodos terminales son perfectos, las aristas son perfectas, y los nodos blancos operan con probabilidad p, determinar cómo son comparativamente los valores de $R_K^{(n)}(G)$ (confiabilidad en nodos respecto de K) para les Redes 2 y 3.

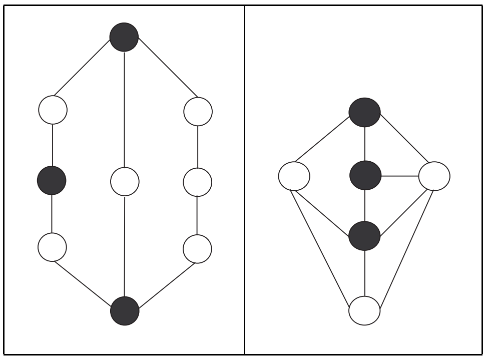

Figura 2: Red 2 y Red 3.

Problema 3: Dada la Red 4 de la Figura 4 donde los nodos negros son terminales y los enlaces etiquetados con 1 son enlaces perfectos. Se pide:

i) Determinar la mejor cota inferior posible para $R_{\{s,t\}}(G)$ vía aplicación del Teorema de Colbourn-Brecht. Asumir que los nodos son perfectos y las aristas (salvo las etiquetadas con 1) operan con idéntica probabilidad p.

ii) Asumiendo ahora que **todas** las aristas de la Red 5 de la Figura 4 operan con identica probabilidad $p = 0.96$ y todos los nodos son terminales. Determinar el valor $p_0 \in (0, 1)$ dado por el Lema de Moore-Shannon que hace que:

- $R_V(G, p) < p$ para $0 < p < p_0$.
- $R_V(G, p) > p$ para $p_0 < p < 1$.

Determinarlo numéricamente utilizando Matlab.

iii) Dada la Red 6 de la Figura 3. Asumir que todas las aristas operan con probabilidad p y que los nodos son perfectos. En este caso, determinar la complejidad que tiene computar el mínimo de:

$$\prod_{i=1}^{f}(1 - p^{l_i}),$$

donde $l_1, ..., l_f$ son longitudes de f edge-disjoints s, t paths, con $1 \leq f \leq c$, y c es la arista conectividad de la red. ¿Cual es el valor de ese mínimo?. ¿Se contradice el Teorema de Raman?.
Dar una cota inferior para $R_{\{s,t\}}(G)$ aplicando el Teorema Colbourn-Brecht.

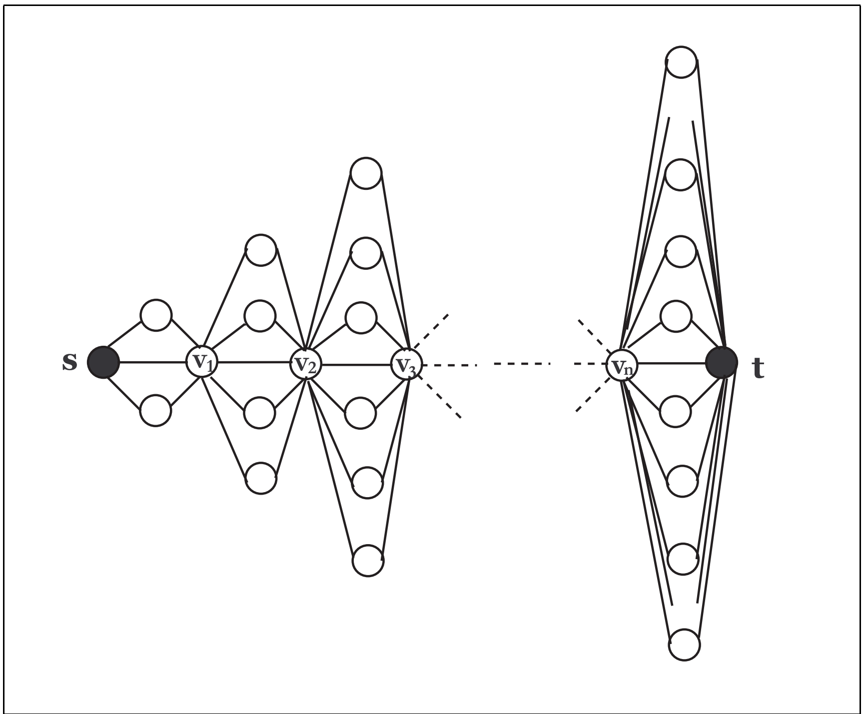

Figura 3: Red 6.

Problema 4: Dada la Red 7 de la Figura 5. Se pide:

i) Aplicar el Teorema de Stivaros para calcular el valor de $R_n(G)$ en función de p, siendo p la probabilidad de operación de los nodos. Las aristas se asumen perfectas.

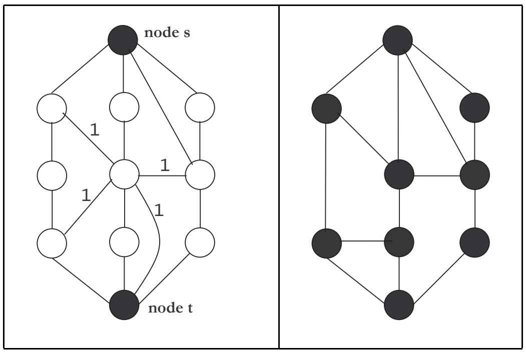

Figura 4: Red 4 y Red 5.

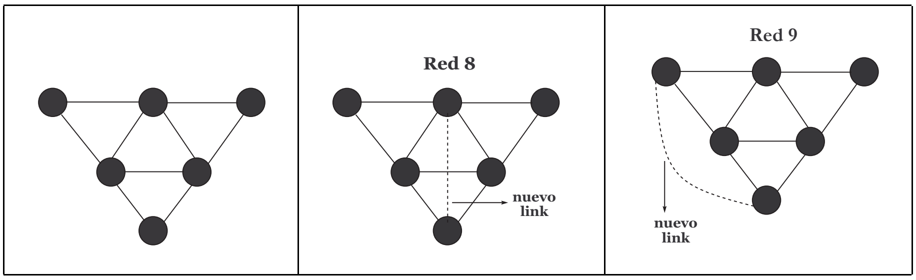

Figura 5: Red 7, Red 8, y Red 9.

ii) Un ingeniero quiere aumentar la confiabilidad de la red y plantea dos alternativas dadas por las Redes 8 y 9 de la Figura 5. En ambos casos los enlaces tentativos son perfectos. Tomando $p = 0.97$, determinar como impacta en ambos casos la agregación del nuevo link sobre la confiabilidad $R_n(G)$.

Problema 5: Considere un grafo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos reales positivos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$, dos nodos distinguidos $\{s, t\} \subset V$. Asumir que todas las aristas tienen probabilidad de operación igual a p y que los nodos son perfectos. Dada una probabilidad umbral p_{min}, se desea encontrar un subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo que contenga a s y t y además $R_{\{s,t\}}(H) \geq p_{min}$.

i) ¿Qué topología asume la solucíon óptima a este problema?. Diseñe un algoritmo que encuentre la solución exacta al problema.

ii) Asumiendo ahora que los costos son uniformes y las probabilidades de operación de las aristas son heterogéneas, i.e. se tiene un valor p_v $\forall v \in V$, diseñar un algoritmo que encuentre la solución exacta a este problema.

Problema 6: Considere un grafo simple no dirigido $G = (V, E)$ y tres nodos $\{s, t, z\} \subset V$. Las aristas se asumen que operan todas con probabilidad p y los nodos son perfectos. Dado un entero positivo h, se define $\hat{R}^{(h)}_{\{s,t,z\}}$ como la probabilidad de que, dado que ocurren fallas en los links, los nodos s, t, y z se encuentren conectados vía un ciclo de longitud menor o igual a h. Se pide:

i) Determinar si $\hat{R}^{(h)}_{\{s,t,z\}}$ así definido es un modelo coherente.

ii) Tomando $h = 5$, $p = 0.95$, y considerando el grafo de la Figura 6, determine el valor de $\hat{R}^{(h)}_{\{s,t,z\}}$.

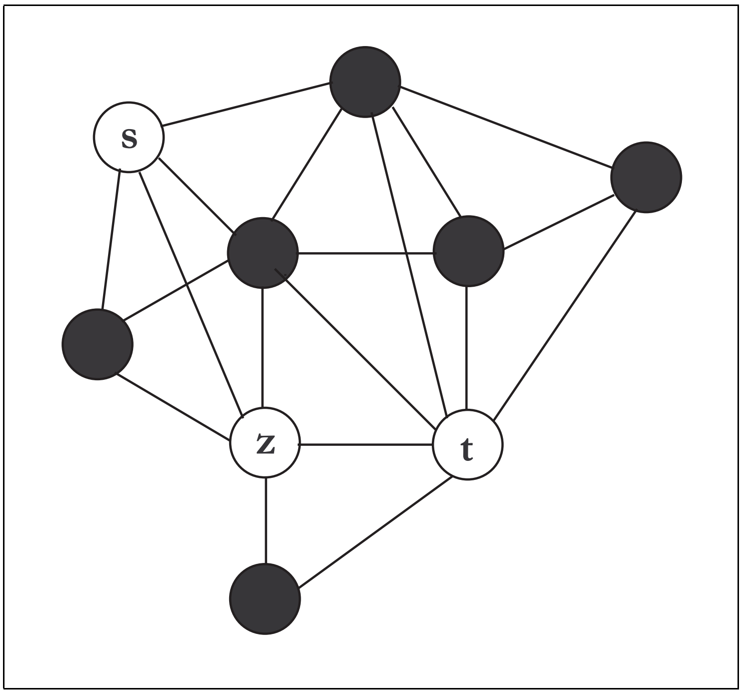

Figura 6: Red 10.

Problema 7: Sobre la Red de la Figura 6, tomando como conjunto de terminales $K = \{s, t, z\}$ y el resto nodos de Steiner, se pide:

Parte A:

i) Asumiendo que las conexiones entre nodos de T tienen probabilidad de operación 0.99, las conexiones entre nodos de Steiner tienen probabilidad de operación 0.98, y las conexiones entre un nodo de K y un nodo de Steiner tiene probabilidad de operación 0.97 calcular en forma exacta la $R_K(G)$ en base al Algoritmo de Satyanarayana-Chang (Algoritmo FACT).

ii Estimar el valor de $R_K(G)$ basado en el Médodo de Riesgo Total.

iii Estimar el valor de $R_K(G)$ basado en el Médodo Dagger.

iv Estimar el valor de $R_K(G)$ basado en el Método RVR.

Parte B:
Asuma ahora que las aristas de la Red de la Figura 6 son perfectas, los nodos de K son perfectos, y los nodos de Steiner tienen probabilidad de operación 0.98. Se pide:

i) Estimar la confiabilidad de la red en base a Monte Carlo Crudo.

ii) Estimar la confiabilidad de la red en base al Método Antitético.

iii) Estimar la confiabilidad de la red en base al Método RVR para el caso de fallas en nodos.