Ecuaciones diferenciales usadas en Mecánica Newtoniana

Lucía Duarte - 2016

Consideramos ecuaciones diferenciales ordinarias cuya función incógnita llamaremos x, y ésta es función del tiempo, es decir, $x(t)$.

Las derivadas respecto al tiempo de la función $x(t)$ se escriben con un punto superior:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \quad ; \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

La solución $x(t)$ de una ecuación diferencial ordinaria dependerá de las **condiciones iniciales** del problema.

(a) Ecuación de primer orden: Sólo involucra la derivada primera $\dot{x}$ de la función incógnita.

Llamamos condición inicial a una condición del tipo $x(t_0) = x_0$ que nos permite conocer el valor de la función incógnita para un cierto valor de la variable t (UNA condición). Usualmente es el valor de la función x en el instante inicial considerado para el problema. Imponiendo que nuestra solución genérica verifique la condición inicial, la determinamos de forma única.

(b) Ecuación de segundo orden: Involucra la derivada segunda $\ddot{x}$ y (eventualmente) la primera $\dot{x}$.

Las condiciones iniciales que nos permiten determinar la solución de forma única son una para el valor inicial de la función, y otra para la derivada primera (DOS condiciones): $x(t_0) = x_0$ y $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$. Usualmente son el valor de la función x y el valor de la derivada $\dot{x}$ en el instante inicial considerado para el problema.

Una vez que encontramos una solución genérica $x(t)$, debemos fijar las constantes de integración haciendo que ésta (y en caso de ecuaciones de segundo orden) también su derivada primera $\dot{x}(t)$, verifiquen las condiciones iniciales que se dan en los datos del problema considerado.

1.1. Ecuación de primer orden de variables separables

Una ecuación diferencial de primer orden se llama de variables separables si tiene la forma:

$$\dot{x} = f(x)g(t)$$

La solución se encuentra separando lo que depende de x y lo que depende de t a cada lado de la igualdad, y hallando la primitiva respecto a t en ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{\dot{x}}{f(x)} dt = \int g(t) dt$$

y haciendo el cambio de variable $\dot{x} dt = dx$.

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t) dt + C$$

La constante de integración C se halla imponiendo la condición inicial $x(t_0) = x_0$ que se conozca para el problema, y se invierte la relación hallada para despejar $x(t)$.

1.2. Ecuación lineal de primer orden

1.2.1. Homogénea

Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea a una ecuación de la forma:

$$\dot{x} + f(x)x = 0 \quad (H)$$

Es una ecuación de variables separables como la anterior.

Caso particular: $\dot{x} + bx = 0$ con b una constante. Solución: $x(t) = Ce^{-bt}$, donde C es la constante de integración que se determina imponiendo la condición inicial $x(t_0) = x_0$.

1.2.2. No homogénea

Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea a una ecuación de la forma:

$$\dot{x} + f(x)x = g(t) \quad (NH)$$

donde la función $g(t)$ depende explícitamente de t y no de $x(t)$, que es la función que estamos buscando.

Método general:

I. Se halla una solución general de la ecuación homogénea correspondiente (H), con $g(t) = 0$ (el caso anterior). Llamamos a esa solución general $x_H(t)$, y recordamos que depende de una constante de integración C.

II. Hallamos una solución particular $x_P(t)$ de la ecuación no homogénea (NH). Para encontrar una solución particular se prueban soluciones de forma "similar" a la función $g(t)$.

III. Sumamos la solución de la ec. homogénea y la particular: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$.

IV. Imponemos la condición inicial $x(t_0) = x_0$ a la función $x(t)$, y eso nos permite determinar la constante C que quedaba de la solución general $x_H(t)$ de la ec. homogénea. Nótese que la condición inicial se impone en el último paso del procedimiento.

Ejemplo: $\dot{x} + bx = q$ con q constante y condición inicial $x(t = t_0) = x_0$.

La ecuación homogénea tiene solución $x_H(t) = Ce^{-bt}$ como vimos en la sec. 1.2.2. Como $g(t) = q$ tomamos la solución particular $x_P = l$ constante. Ahora determinamos l para que $x_P = l$ verifique la ecuación: $b\, l = q \to l = q/b$ y la solución particular queda completamente determinada y es $x_P(t) = q/b$. La solución general es $x(t) = x_H(t) + x_P(t) = Ce^{-bt} + q/b$. Ahora encontramos el valor de la constante C imponiendo la condición inicial: $x(t_0) = C + q/b = x_0 \to C = x_0 - q/b$ y finalmente la solución es $x(t) = (x_0 - q/b)e^{-bt} + q/b$, que verifica la ecuación diferencial y la condición inicial del problema.

1.3. Ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes

1.3.1. Homogénea

Es una ecuación diferencial de la forma:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (H)$$

donde a y b son constantes independientes de x y t.

Buscamos soluciones hallando las raíces del **polinomio característico** de la ecuación: $\lambda^2 + a\lambda + b$. Éstas dos raíces determinan soluciones independientes, que sumadas dan la solución general de la ecuación homogénea lineal de segundo orden.

Las constantes A y B se determinan en los tres casos imponiendo las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

Raíces del polinomio característico : $\lambda^2 + a\lambda + b$	$x(t)$
Dos raíces reales $\lambda_1 = \alpha$ y $\lambda_2 = \beta$	$Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$
Una raíz real doble $\lambda_1 = \lambda_2 = \gamma$	$Ae^{\gamma t} + Bte^{\gamma t}$
Dos raíces complejas conjugadas $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$	$Ae^{\alpha t}cos(\beta t) + Be^{\alpha t}sin(\beta t)$

1.3.2. No homogénea

Es una ecuación diferencial de la forma:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = g(t) \quad (NH)$$

donde a y b son constantes independientes de x y t y la función $g(t)$ depende explícitamente de t y no de $x(t)$, que es la función que estamos buscando.

Método general:

I. Se halla una solución general de la ecuacón homogénea correspondiente (H), con $g(t) = 0$ (el caso anterior). Llamamos a esa solución general $x_H(t)$, y recordamos que depende de dos constantes de integración A y B.

II. Hallamos una solución particular $x_P(t)$ de la ecuación no homogénea (NH).

Solución particular de la ec. lineal de segundo orden no homogénea: Método de selección.

Se prueban soluciones de forma “similar” a la función $g(t)$:

$g(t)$	Obs.	$x_P(t)$
$P_n(t)$ polinomio de orden n	0 no es raíz del polinomio cacacterístico	$Q_n(t)$ polinomio de orden n
	0 es raíz del polinomio cacacterístico	$tQ_n(t)$
$De^{\delta t}$	δ no es raíz del polinomio característico	$Ge^{\delta t}$
	δ es raíz del polinomio característico	$tGe^{\delta t}$
$e^{\delta t}P_n(t)$	δ no es raíz del polinomio característico	$e^{\delta t}Q_n(t)$
	δ es raíz del polinomio característico	$te^{\delta t}Q_n(t)$
$Dsin(\delta t) + Gcos(\delta t)$	$\pm i\delta$ no es raíz del polinomio característico	$Hsin(\delta t) + Lcos(\delta t)$
	$\pm i\delta$ es raíz del polinomio característico	$tHsin(\delta t) + tLcos(\delta t)$

Las constantes indeterminadas que aparecen en la solución particular $x_P(t)$ (en la tabla son los coeficientes del polinomio Q_n, G, H y L) se hallan en este momento, haciendo que la solución particular verifique la ecuación diferencial.

III. Sumamos la solución de la ec. homogénea y la particular: $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

IV. Imponemos las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ y encontramos los valores de las dos constantes de integración A y B restantes.

1.4. Ecuaciones diferenciales autónomas

I) Cuando encontramos ecuaciones diferenciales autónomas de la forma:

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

en las que la función f depende de la función incógnita x pero no explícitamente del tiempo, podemos "preintegrar"la ecuación diferencial para obtener una relación $\dot{x}(x)$, en la que se puede hallar la velocidad $\dot{x}$ en función de la posición x.

Para ello, multiplicamos todos los términos de la ecuación por $\dot{x}$ y observamos que $\ddot{x}\dot{x} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{x}^2}{2}$ entonces tenemos

$$\ddot{x}\ \dot{x} + f(x)\ \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) + f(x)\ \dot{x} = 0$$

y podemos integrar en el tiempo:

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)\ dt + \int f(x)\ \dot{x}dt = Cte.$$

En el segundo término podemos hacer el cambio de variable $dx = \dot{x}dt$ e integrar directamente en x, obteniendo una primitiva de la función $f(x)$ que llamamos $F(x)$.

Veremos cómo determinar la solución conociendo las condiciones iniciales.

La integración del primer término se escribe como

$$\int_{\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0}^{\dot{x}(t)} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) dt = \dot{x}^2(t) - \dot{x}_0^2$$

Y la del segundo término es

$$F(x(t)) - F(x(t_0) = x_0) = \int_{x=x_0}^{x=x(t)} f(x)dx$$

Finalmente encontramos la velocidad en función de la posición como:

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_0^2 + F(x_0) - F(x)$$

II) Cuando encontramos ecuaciones diferenciales autónomas de la forma:

$$\ddot{x} + f(\dot{x}^2) + g(x) = 0$$

se puede reducir el orden haciendo el cambio de variable $\dot{x}^2 = u(x)$. Entonces tenemos que:

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} = 2\dot{x}\ddot{x} \qquad \frac{du}{dx} = u'(x) = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\dot{u}}{\dot{x}} = 2\ddot{x}$$

y la ecuación se puede escribir como:

$$u'(x) + 2f(u(x)) + 2g(x) = 0$$

que es una ecuación lineal de primer orden no homogénea, como en la sec. 1.2.2.

III) También con el mismo cambio de variable que en (II) podemos resolver ecuaciones de la forma:

$$\ddot{x} + f(\dot{x}^2)g(x) = 0$$

que se convierte en la ecuación de variables separables, como en la sec. 1.1.

$$u' + 2f(u)g(x) = 0$$