Sistemas de Comunicación
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

5 de Julio de 2019

Indicaciones:

- Es el último parcial de la historia del curso: el fin de una era.
- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [20 pts.]

El apagón analógico está comenzando en el ámbito radial, y se comienza a evaluar abandonar la FM en pos de un sistema completamente digital. Usted es el ingeniero responsable de una estación radial (Finales FM, en 99.9 MHz), y evaluará la pertinencia de esta transición, en particular referido al ancho de banda y alcance. Una breve búsqueda lo lleva a encontrar varias recomendaciones de que, incluso usando las mejores técnicas de compresión de audio, una tasa menor a 192 kbps hará que la música suene peor que con la transmisión actual. Sin embargo, programas mayoritariamente de voz pueden bajar hasta 32 kbps sin problemas. En una primera aproximación, considerará transmisiones en QPSK con pulsos de Nyquist (con factor de rolloff $\rho = 0.25$). Por supuesto, el ancho de banda disponible será el de su transmisora FM: 200 kHz.

(a) Pruebe que el ancho de banda disponible es suficiente para transmitir a 192 kbps.

(b) ¿Con qué potencia se debe transmitir si se pretende un alcance de 20km? Suponga que una probabilidad de error de bit de como máximo 10^{-4} es necesaria, y que podrá asumir un canal AWGN con PSD igual a $N_0/2 = 1 \times 10^{-20}$ W/Hz. Además, para calcular la atenuación (en dB) podrá usar la siguiente fórmula empírica para entornos urbanos:

$$L(d, f) = 46.32 + 26.07 \log_{10} f + 33.77 \log_{10} d, \quad (1)$$

con d la distancia en kilometros y f la frecuencia en MHz.

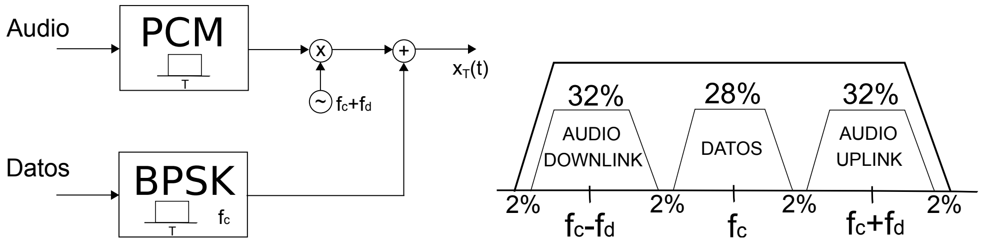
Visto el ancho de banda excedente se plantea la posibilidad de enviar (multiplexar) más de un programa: uno de música con alto bitrate (192 kbps) y varios de noticias/variété (a 32 kbps). Se analizarán dos posibilidades: transmitir un único flujo de bits (y que el receptor decodifique cada programa por separado) o transmitir cada programa en una frecuencia distinta (dentro del ancho de banda asignado).

(c) ¿Cuántos programas de noticias/variété se podrían agregar a la transmisión en cada caso? Suponga que se necesitan 500 Hz de banda de guarda entre cada transmisión en el caso de multiplexado en frecuencia. Para los números calculados realice un diagrama del par transmisor/receptor y bosqueje el espectro de la señal transmitida para ambos casos.

(d) ¿Con qué potencia total se debe transmitir si se quiere mantener el alcance de la parte (b) para todos los programas? Suponga el mismo requerimiento en BER y realice el cálculo para ambos tipos de multiplexado.

Problema 2 [20 pts.]

Ante el gran crecimiento de usuarios de bicicletas en la ciudad, su empresa decide lanzar un nuevo producto al mercado, y usted es responsable del diseño. Se trata de un dispositivo ajustable al birrodado, que recolecta distintas métricas (ej. ubicación, velocidad, dirección). Además, permite comunicarse en forma remota con otro dispositivo, tanto para el intercambio de datos como una comunicación de audio full-dúplex. El dispositivo está previsto que opere en la banda ISM debajo de 1 GHz, específicamente desde 915 MHz a 928 MHz. En la figura se muestra el transmisor y la máscara espectral definida para un dispositivo, donde la banda central del canal se usa para los datos, mientras que en $f_c - f_d$ y $f_c + f_d$ se ubica el downlink y uplink del audio (notar que estos deben invertirse en el otro dispositivo). La señal de audio está normalizada, tiene potencia $S_a = 1/2$ y ancho de banda W lo mayor posible (a determinar).



(a) Dar un diagrama de bloques detallado del receptor del dispositivo, basado en filtros pasabajos, explicando su funcionamiento e indicando los parámetros correspondientes de cada bloque.

(b) Diseñar el sistema PCM para tener una $SNR_D^{min} = 30dB$ y tal que haya 26 canales disponibles en la banda de operación, minimizando la potencia de transmisión y usando la mayor frecuencia de muestreo posible. Indicar el máximo ancho de banda soportado para la comunicación de audio.

(c) Considerando solamente la comunicación de audio, hallar la máxima distancia soportada por el sistema si la potencia de transmisión es $S_T^{\mathrm{PCM}} = 200\ mW$. Asumir que la atenuación es la de espacio libre[1] y que el receptor introduce ruido AWGN con $G_n(f) = \eta/2$, siendo $\eta = 10^{-15}\ W/Hz$.

Se considera ahora un diseño alternativo, utilizando un multiplexor TDM para combinar el flujo de datos y el audio codificado con PCM. En este caso se mantiene el ancho de banda total del canal, así como las guardas del 2 %, que ahora separan solamente la mitad del espectro para downlink y la otra mitad para uplink (ambas con un 47 % del canal). La tasa de bits para el flujo de datos es de 140 kbps.

(d) Rediseñar el sistema PCM, con los mismos criterios del caso previo. Mostrar que este sistema soporta un ancho de banda del audio menor al anterior. ¿Cómo se podría solucionar?

(e) ¿Qué ventaja tiene este diseño alternativo respecto al anterior? En particular considere cómo cambia el acceso al medio para el flujo de datos.

Problema 3 [10 pts.]

Se considera un archivo en una computadora de largo M bits (con M suficientemente grande a todos los efectos), tal que la ocurrencia de 0s y 1s son iid y con probabilidad de que un bit sea 0 igual a p_0. Dado que p_0 es relativamente alto, se considera una codificación alternativa donde se indicará cuántos 0s sucesivos hay previo a cada 1 (una variación del denominado *Run-length encoding*, donde supondremos que todos los archivos terminan en 1). Por ejemplo, si el archivo comienza con 00110001, las primeras 3 salidas del codificador serán $X_i = 2, 0, 3$ para $i = 1, 2, 3$.[2]

(a) Calcule el largo medio del archivo re-codificado en función de p_0 y M. Grafíquelo en función de p_0 junto con el largo promedio que obtendría un codificador binario óptimo y verifique que este último es mayor para muchos valores de p_0. Argumente porqué esto no contradice el teorema de codificación de fuente.

(b) Calcule la entropía del archivo re-codificado. Verifique que es igual a la del archivo original. Argumente porqué es esperable este resultado.

(c) El archivo re-codificado se va a enviar por un canal analógico de ancho de banda 10 Hz y $SNR = 10$ dB. ¿Cuál es el mínimo tiempo en que se podría transmitir sin que existan errores?

---

[1]La atenuación en espacio libre está dada por la ecuación de Friis: $L(d) = \left(\frac{4\pi df}{c}\right)^2$ siendo $c = 3 \times 10^8\ m/s$.

[2]Pueden ser útiles para el ejercicio las igualdades $\sum_{k\geq 0} kp^{k-1} = 1/(1-p)^2$ y $\sum_{k\geq 0} p^k = 1/(1-p)$.

Solución

Problema 1

(a) En QPSK la tasa de símbolos es la mitad de la tasa de bits, por lo que en este caso tendremos que $1/T_s = r_b/2 = 96\,\text{kHz}$. El ancho de banda de una señal conformada en pasabanda por un pulso de Nyquist es

$$B_T = \frac{1+\rho}{T_s} = 1.25 \times 96\text{kHz} = 120\text{kHz}. \tag{2}$$

Por lo tanto los $200\,\text{kHz}$ son más que suficientes.

(b) En QPSK la tasa de error de símbolos de un receptor óptimo se relaciona con la energía de símbolo de la siguiente forma:

$$P_e = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{LN_0}}\right)\right)^2 \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{LN_0}}\right), \tag{3}$$

y por lo tanto la probabilidad de error de bit es

$$P_{eb} = \frac{P_e}{2} \approx Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{LN_0}}\right) < 10^{-4} \Rightarrow \sqrt{\frac{E_s}{LN_0}} > 3.72 \Rightarrow E_s > L \times 27.7 \times 10^{-20}. \tag{4}$$

En este caso la atenuación resulta en $L = 142.4\,\text{dB}$ (aproximadamente 1.73×10^{14} en escala lineal), por lo que $E_s > 4.8 \times 10^{-5}$. La potencia mínima de transmisión P_T será entonces

$$P_T = \frac{E_s}{T_s} > 4.8 \times 10^{-5} \times 96 \times 10^3 = 4.6\,W. \tag{5}$$

(c) Para el caso de multiplexar todos los programas en un solo flujo de bits, simplemente sumamos las tasas para hallar el total. Como contamos con $200\,\text{kHz}$, esta tasa no puede ser mayor a $400/1.25 = 320\,\text{kbps}$. Por lo tanto se pueden agregar 4 programas de $32\,\text{kbps}$, generando un flujo de $320\,\text{kbps}$, ocupando la totalidad de los $200\,\text{kHz}$ disponibles.
Para el caso de multiplexar en frecuencia, el flujo de $192\,\text{kHz}$ ocupa $120\,\text{kHz}$. Además, cada flujo de $32\,\text{kHz}$ ocupará $20\,\text{kHz}$ ($20{,}5\,\text{kHz}$ si contamos la banda de guarda). Por lo tanto podríamos transmitir 3 programas de $32\,\text{kbps}$. La diferencia está básicamente en el intervalo de guarda, necesaria para evitar interferencia entre los distintos programas.
Los diagramas se pueden ver en las figuras 1 y 2. Se usó una representación compleja bandabase, por lo que estrictamente hablando debería haber algunos conversores, que no están en la figura. Lo mismo con la amplificación de la señal.

(d) En el caso de la multiplexación en el tiempo, la potencia de transmisión se calcula igual a la parte (b) y resulta:

$$P_T = \frac{E_s}{T_s} > 4.8 \times 10^{-5} \times 160 \times 10^3 = 7.68\,W. \tag{6}$$

En el caso de la multiplexación en frecuencia tenemos un primer término en frecuencia que ya calculamos debido a la programación musical. Las transmisiones a $32\,\text{kbps}$ necesitan una potencia de al menos:

$$P_T = \frac{E_s}{T_s} > 4.8 \times 10^{-5} \times 16 \times 10^3 = 0.77\,W \tag{7}$$

cada una. Como tenemos 3, necesitaremos en total $P_T = 6.9\,\text{W}$.

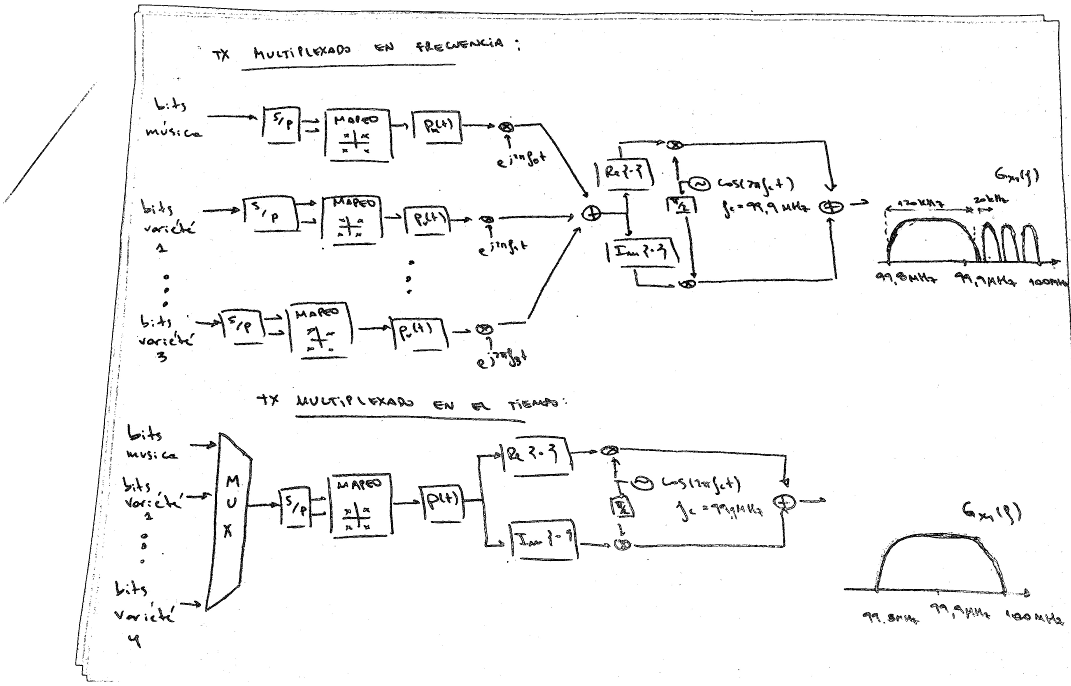


Figura 1: Los diagramas del transmisor en cada caso. Notar que en el caso del multiplexado en frecuencia cada programa tiene su propio pulso (que dependerá de la tasa de bits).

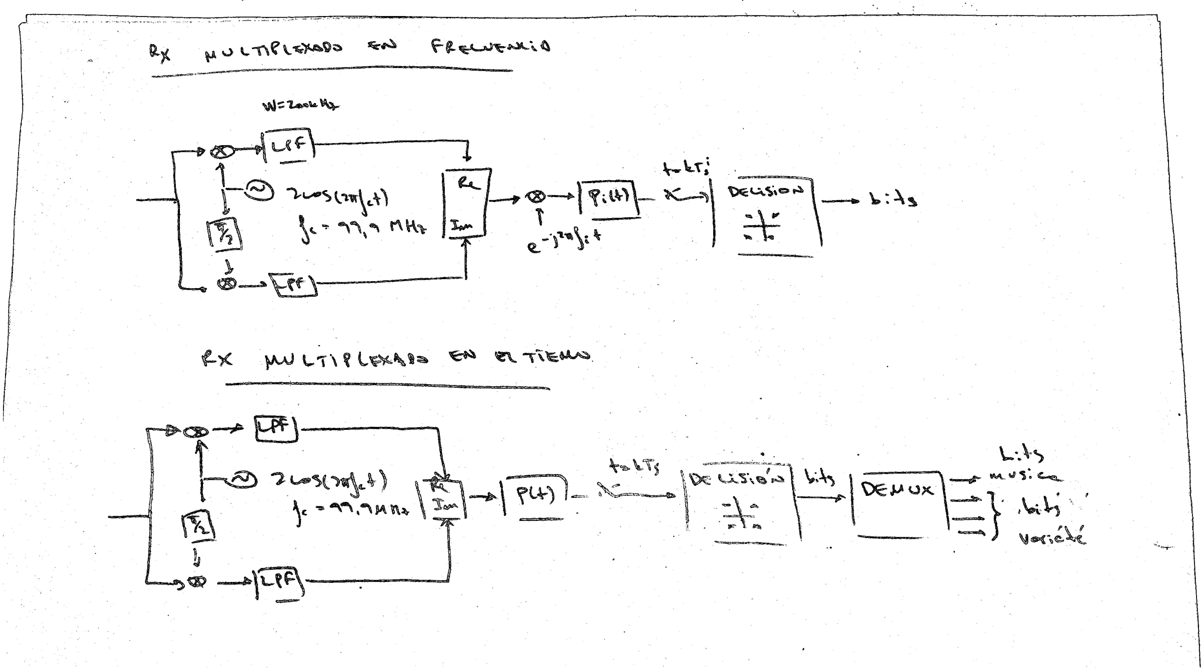
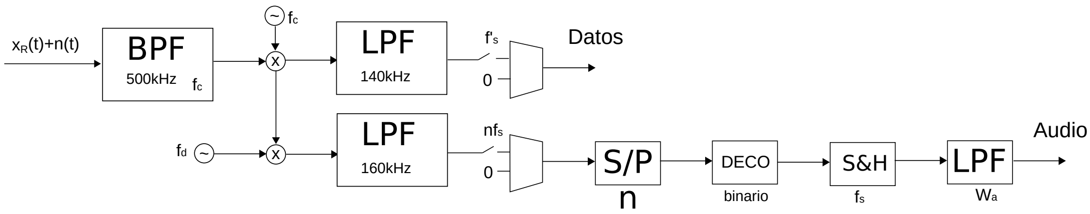


Figura 2: Los diagramas del receptor en cada caso. Notar que en el caso del multiplexado en frecuencia cada programa tiene su propio pulso y tiempo de símbolo (que dependerá de la tasa de bits).

Problema 2

(a) Notar que el receptor funciona tanto si el audio está en $f_c + f_d$ como si está en $f_c - f_d$.



(b) Si se necesitan 26 canales, eso implica que cada canal debe ocupar como máximo 500 kHz. De esa forma, los datos ocupan 140 kHz (28 %), se dejan guardas de 10 kHz (2 %), y el audio codificado en PCM tiene 160 kHz (32 %, igual para downlink y uplink).
De las ecuaciones de PCM tenemos: $B_T > nf_s > 2nW$, $q = m^n$ y $SNR_D = 3q^2 \frac{S_a}{E_{max}^2} \frac{f_s}{2W}$. Para minimizar la potencia de transmisión, debemos usar el menor m posible, es decir $m = 2$. Por lo tanto, si $SNR_D = 1000$, con $S_x = 1/2$ y $f_s = 2W$, entonces se tiene que $q > 26$ y $n = 5$.
Resta entonces hallar la f_s, la cual depende únicamente del W seleccionado para la comunicación de audio. Notar que este parámetro no tiene ninguna influencia sobre la potencia de transmisión, con lo cual se puede elegir simplemente verificando la condición de $B_T > nf_s$. Sustituyendo se tiene que $f_s = 32\ kHz$ y de esta forma el máximo ancho de banda del audio soportado es $W = 16\ kHz$.

(c) Se debe cumplir con la condición de umbral, es decir que $P_e << 1/4q^2$. Además, sabemos que para BPSK la $P_e = Q(\sqrt{SNR_R})$ siendo $SNR_R = \frac{S_T^{\text{PCM}}}{L\eta B_T}$. A partir de estas ecuaciones, se debe hallar la distancia máxima d_{max} tal que se cumpla que $P_e = 1/40q^2 \approx 2 \times 10^{-5}$.
Despejando de la cola gaussiana, se tiene que $SNR_R = \frac{S_T^{\text{PCM}}}{L\eta B_T} \approx 16.81$, de donde $L(d) = \left(\frac{4\pi df}{c}\right)^2 \approx 929.506$.
Calculando la distancia máxima para el canal del peor caso, es decir con $f_c = 927.75\ MHz$ y $f_c + f_d = 927.91\ MHz$, se tiene que la distancia máxima es: $d_{max} = \frac{\sqrt{L}c}{4\pi f} \approx 222\ m$.

(d) Si el ancho de banda del canal se mantiene, eso implica que el flujo de bits máximo está dado por el ancho de banda que resulta $B_T = 235\ kHz$. Por lo tanto, el flujo máximo que puede generar el sistema PCM está dado por $r_b^{PCM} < 235\ kbps - 140\ kbps = 95\ kbps$. Para cumplir con la $SNR_D^{min} = 30dB$ se mantiene el $n = 5$, pero ahora eso resulta en una frecuencia de muestreo menor $f_s = 95/5 = 19$. Esto implica que el máximo ancho de banda del audio soportado ahora es $W = 9.5\ kHz$, es decir bastante menor al caso anterior. Una forma posible para solucionar esto, es pasar a usar un sistema PCM m-ario con m¿2, de forma de bajar el n y poder mantener una f_s mayor. Esta solución tiene como contraparte, que es necesario una S_T mayor para mantener la misma distancia máxima soportada.

(e) Los datos ahora van por canales independientes para el uplink y para el downlink, con lo cual no es necesario resolver el acceso al medio de manera temporal como en el caso previo, lo cual requiere alguna forma de sincronizarse entre ambos dispositivos. En este caso el acceso al medio se resuelve vía FDM, donde cada sentido de la comunicación opera en frecuencias distintas.

Problema 3

(a) El largo del archivo re-codificado será cuántos 1s hay en el archivo original. Por lo tanto, y dado que la probabilidad de cada 1 es $(1 - p_0)$, resulta $M(1 - p_0)$. Por otro lado, un codificador binario óptimo va a lograr como mínimo un largo medio igual a la entropía de cada bit multiplicado por M (es decir, la entropía del archivo original). Por lo tanto, el tamaño mínimo será:

$$\overline{L}_{\text{mín}} = -M\left(p_0 \log_2(p_0) + (1 - p_0)\log_2(1 - p_0)\right). \tag{8}$$

Es fácil verificar realizando la curva de la entropía y $(1 - p_0)$ que para todos los valores de p_0 de interés de este ejercicio (p_0 cercano a 1) la entropía es mayor (figura 3). Incluso para el caso de $p_0 = 0.5$ el

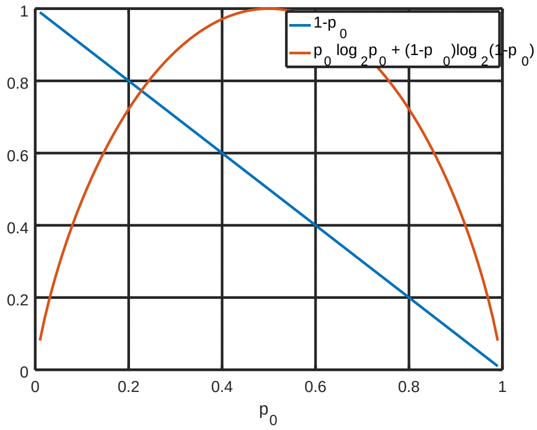


Figura 3: La entropía de cada bit y la función $(1-p_0)$.

largo medio del código binario óptimo es M, pero para el código estudiado aquí es $M/2$. La aparente contradicción con el teorema de codificación es que el código estudiado aquí no es binario y usa todos los naturales.

(b) Como cada bit es iid, la cantidad de 0s consecutivos antes de cada 1 también serán iid. En particular, la probabilidad de que la cantidad de veces seguidas que aparece un 0 sea k es:

$$P(X=k)=(p_0)^k(1-p_0).$$

Tenemos entonces que los símbolos posibles en nuestro alfabeto son los naturales, son iid y con la distribución anterior. Por lo tanto, la entropía total del archivo re-codificado será su largo medio por la entropía de cada símbolo.
Esta entropía es:

$$H\{X\}=-\sum_{k=0}^{\infty}p_0^k(1-p_0)\log_2\left(p_0^k(1-p_0)\right)=-\sum_k p_0^k(1-p_0)\log_2\left(p_0^k\right)-\sum_k p_0^k(1-p_0)\log_2\left(1-p_0\right) \quad (9)$$

$$\Rightarrow H\{X\}=-(1-p_0)\log_2(p_0)\sum_k p_0^k k-(1-p_0)\log_2(1-p_0)\sum_k p_0^k, \quad (10)$$

donde se usaron propiedades básicas de logaritmos. Usando las fórmulas para series que se dan en la letra lo anterior resulta:

$$H\{X\}=-\log_2(p_0)\frac{p_0}{1-p_0}-\log_2(1-p_0). \quad (11)$$

Como el largo medio del archivo re-codificado es $(1-p_0)M$, la entropía total resulta

$$M(1-p_0)H\{X\}=M(1-p_0)\left(-\log_2(p_0)\frac{p_0}{1-p_0}-\log_2(1-p_0)\right)=-M\left(p_0\log_2(p_0)+(1-p_0)\log_2(1-p_0)\right), \quad (12)$$

igual a la del archivo original. Esto debe ser así pues simplemente estamos sustituyendo una representación del mismo archivo por otra, sin perder información en el proceso (es decir, se puede recuperar el archivo original con el re-codificado). En la entropía entran únicamente las probabilidades de cada evento o símbolo (o archivo en este caos), y no su representación.

(c) La capacidad del canal analógico es:

$$C=B\log_2(1+SNR)=10\log_2(1+10)=34.6 \text{ bits/s}$$

Por el teorema de Shannon sobre canales con ruido, si la tasa de información es menor a esta capacidad se puede transmitir sin errores. Por lo tanto, el tiempo mínimo es igual a

$$T=\frac{-M\left(p_0\log_2(p_0)+(1-p_0)\log_2(1-p_0)\right)}{34.6}s, \quad (13)$$

sea cual sea la representación del archivo. Es decir, este tiempo corresponde a alguna codificación de canal que no conocemos.