

Sistemas de Comunicación

Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

7 de julio de 2017

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

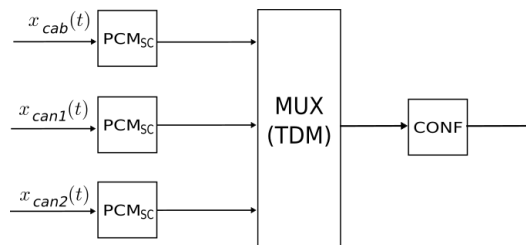
Problema 1 [20 pts.]

En Uruguay están comenzando a realizarse los primeros despliegues de la Internet de los Objetos (IoT). Tras consultar al ente regulador local (URSEC) se concluye que la banda entre 915 y 928 MHz está disponible para aplicaciones de este tipo. Tras el análisis de las aplicaciones que usarán el servicio se concluye que sería suficiente con 150 kbps por canal y que serán necesarios 60 canales para atender la demanda. Los terminales IoT son de batería muy limitada, por lo que se utilizará una modulación sencilla: BPSK con pulso de Nyquist y en recepción se usará un filtro apareado con demodulación coherente.

- (a) Dibuje la constelación correspondiente, identificando regiones y fronteras de decisión.
- (b) Dibuje el diagrama completo del transmisor y receptor, incluyendo la parametrización del pulso, de tal forma de respetar los requisitos planteados hasta ahora. Discuta en particular cómo fijaría (y por qué) el valor de roll-off del pulso.
- (c) Se considera que los servicios a ser instalados deberán soportar una tasa de error máxima de 10^{-3} . Calcule la máxima potencia de ruido que puede soportar el sistema en función de la energía media con la que llegan los símbolos al receptor y los demás parámetros del sistema.
- (d) Se busca un sistema económico con el objetivo de minimizar los costos, lo que lleva a que el sincronismo en recepción no sea ideal. En particular, se introduce un diferencia de fase θ con el transmisor. Calcule la probabilidad de error para este caso y repita la parte anterior si $\theta < \pi/10$.
- (e) Luego de desplegado el servicio, y con el paso del tiempo, se pretende aumentar la tasa de transmisión a 250 kbps por canal. Brinde una solución explicando pros y contras de la misma en términos tanto técnicos como económicos.
- (f) Mientras ultima detalles de su propuesta a la parte anterior, un colega suyo le propone usar OFDM como solución. Usted (a) felicita a su colega por su buen tino y sagacidad, o (b) le hace ver que la idea no es propia de alguien en sus cabales. Justifique.

Problema 2 [20 pts.]

Para la cobertura de un evento deportivo en un estadio se utiliza el sistema de comunicación de la figura. Se transmiten tres señales de audio independientes, una que se genera en la cabina de la radio ($x_{cab}(t)$) y otras dos para la cobertura a nivel de cancha ($x_{can1}(t)$ y $x_{can2}(t)$). Las señales $x_i(t)$ con $i = \{1, 2, 3\}$ tienen todas rango dinámico $[-1,1]$, potencia $S_x = 1/2$ y ancho de banda $W_x = 20$ kHz. Se utiliza la mínima frecuencia de muestreo f_s .



PCM_{sc}: PCM binario de q niveles (n bits), con cuantificación uniforme sin el bloque conformador.
CONF: bloque conformador.

- (a) Dar el diagrama de bloques del sistema PCM_{sc} y el diagrama de bloques del receptor para el sistema propuesto.

Se considera que los bits son independientes y equiprobables y se codifican utilizando señalización polar y un pulso conformador SRRC¹ de ancho T . El canal tiene atenuación L (en potencia) y ancho de banda $B_C = 2$ MHz, e introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo, gaussiano, con una densidad espectral de potencia $\eta/2$. En el instante de muestreo la amplitud de la señal recibida es A_R . Se debe cumplir con el requerimiento mínimo de $SNR_D = 60$ dB.

- (b) Diseñar los parámetros del sistema (q , n , frecuencia de muestreo f_s , ancho de los pulsos T) para cumplir los requerimientos indicados. Indicar los criterios utilizados.
- (c) Si se utiliza un coeficiente de rolloff $\rho = 1$, cómo queda el ancho de banda de transmisión? Es viable la transmisión? Justificar.
- (d) Diseñar la etapa de recepción para minimizar la P_e . Dibujar el diagrama del receptor elegido y dar el umbral óptimo justificando su elección.
- (e) Calcular la energía de bit E_b en recepción y hallar la mínima probabilidad de error P_e .
- (f) Bosquejar la SNR_D en función de SNR_R indicando la zona de trabajo óptima. Justificar.
- (g) Determinar la amplitud de la señal transmitida A_T y la potencia de transmisión S_T .

Pregunta [10 pts.]

- (a) Sean X e Y dos fuentes discretas con leyes $p(x)$ y $p(y)$ respectivamente, y con distribución conjunta $p(x, y)$. Definir los conceptos de entropía de una fuente $H(x)$, entropías condicionales ($H(X|Y)$ y $H(Y|X)$) e información mutua $I(X; Y)$.
- (b) Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos distribuciones de probabilidad discretas, definir la distancia de Kullback-Leibler $D(p||q)$. Mostrar que $I(X; Y) = D(p(x, y)||p(x)p(y))$
- (c) Demostrar la afirmación siguiente: “El condicionamiento solo puede reducir la incertidumbre”. Indicar y justificar en qué caso no hay reducción.

¹SRRC - Square Root Raised Cosine (pulso raíz cuadrada del coseno elevado).

Solución

Problema 1

(a) Ver el teórico. Es importante, tal como indica el encabezado del parcial, justificar bajo qué condiciones se eligen las regiones de decisión. En este caso, si se eligen símbolos de la forma $(-A, A)$, la región será la semirrecta negativa y positiva respectivamente, siempre que los símbolos sean equiprobables y el ruido simétrico (como el gaussiano).

(b) El diagrama del receptor puede encontrarse en el teórico, pero debe incluir la fuente de bits, mapeo a símbolos (respetando la constelación), conformación por el pulso (en este caso que el pulso es de Nyquist es obligatorio filtrar, no es válido multiplicar), y subida al canal correspondiente (en este caso únicamente en fase). En recepción será bajada a bandabase (únicamente fase suponiendo alineación en analógico, pero como por lo general la alineación se hace en digital, y por la última parte, lo más conveniente sería poner fase y cuadratura), filtro apareado (nuevamente es obligatorio filtrar y no multiplicar como en un receptor de correlación pues el filtro es de Nyquist), muestreo cada tiempo de símbolo y decisión.

El pulso la única limitante que tiene que cumplir es ocupar menos de un canal $((928 - 915)/60 \sim 217 \text{ kHz})$ y ser capaz de enviar 150 kbps, por lo que $(1 + \rho)150 < 217 \Rightarrow \rho < 0.44$. A priori, cualquier valor de ρ que cumpla la relación serviría, pero por un lado si es 0.44 el sistema sería propenso a interferencia inter-canal (pues no habría margen entre canales), y si es muy pequeño sería muy propenso a errores de sincronismo en tiempo (algo que las siguientes partes hacen pensar que seguramente falle), por lo que un valor intermedio, como ser 0.3, es razonable.

(c) Para el caso de BPSK, la probabilidad de error bajo ruido blanco gaussiano es $Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$, con E_b la energía de símbolo con la que se recibe luego de pasar por el filtro apareado y N_0 la potencia del ruido. Despejando, se obtiene:

$$\frac{2E_b}{N_0} > 3.09^2 \Rightarrow N_0 < \frac{E_b}{4.77}$$

(d) Un error de fase de θ provoca un giro del mismo ángulo, y por lo tanto el símbolo recibido en el bloque de decisión estará multiplicado por $\cos(\theta)$, y su energía por éste al cuadrado. Por lo tanto, se puede repetir lo anterior resultando en

$$\frac{2E_b \cos^2(\theta)}{N_0} > 3.09^2 \Rightarrow N_0 < \frac{E_b}{5.27}$$

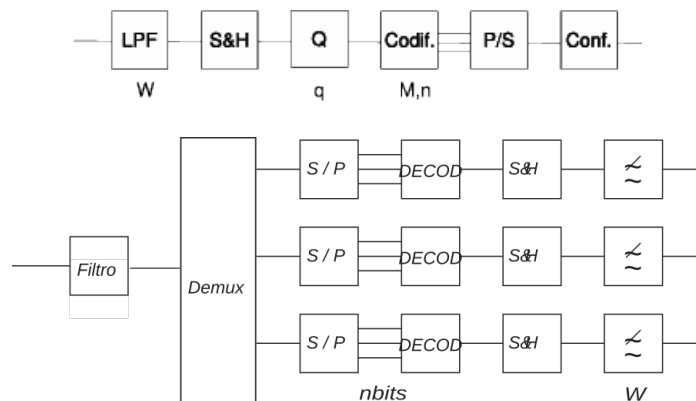
(e) Dado que se pretende una solución económica, lo mejor es tratar de re-usar lo más posible del sistema ya instalado. Hay varias soluciones, pero aquí discutiremos dos:

- Subir de BPSK a 4-ASK. En este caso, la ventaja principal es que tanto el receptor como el transmisor trabajan únicamente con la componente en fase de la señal. El problema técnico es que el aumento en potencia de transmisión para mantener la tasa de error es mucho más significativo que otras alternativas, como ser QPSK.
- Subir a QPSK. Aunque la probabilidad de error sea más o menos la misma con la misma potencia de transmisión, la gran contra es que necesito usar componente en fase y cuadratura. En función de cómo haya sido armado el sistema original, puede ser necesario sustituir todo el sistema.

(f) Claramente (b). Para empezar, estamos hablando de unos pocos kHz de ancho, por lo que la ganancia en ecualización sencilla de OFDM no la vamos a obtener. Además, la FFT es una operación relativamente costosa, por lo que la batería se verá afectada muy negativamente. Esto además de tener que empezar a trabajar en fase y cuadratura, con las desventajas que comentamos en la parte anterior.

Problema 2

(a)



(b) Asumiremos que estamos trabajando sobre el umbral PCM. Se busca una mínima $SNR_D = 60$ dB cuya expresión es:

$$SNR_D = 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W}$$

La mínima frecuencia de muestreo está dada por el teorema de Nyquist:

$$f_s = 2W_x = 40 \text{ kHz}$$

El mínimo ancho de banda de transmisión necesario debe cumplir:

$$\frac{r}{2} = \frac{1}{2T} \leq B_C$$

Dado el esquema de transmisión propuesto se tiene que T debe ser menor que $\frac{1}{3nf_s}$, por lo que combinando ambas ecuaciones queda:

$$3nW_x \leq B_C$$

Se observa que, para alcanzar la mínima SNR_D , q debe cumplir:

$$q \geq 816 \Rightarrow q = 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$$

De esta forma se verifica que:

$$3nW_x = 600 \text{ kHz} \leq B_C = 2 \text{ MHz}$$

Finalmente con los valores hallados se obtiene el ancho del pulso:

$$T = \frac{1}{3nf_s} = 0.833 \mu s$$

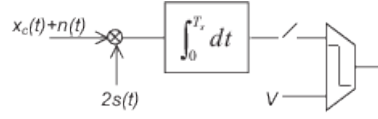
(c) Si coeficiente de rolloff ρ vale 1, entonces el ancho de banda de transmisión queda igual a r . Por lo tanto, ahora se debe verificar:

$$r = \frac{1}{T} \leq B_c$$

Sustituyendo por los valores vemos que la condición se sigue cumpliendo:

$$3n2W_x = 1.2 \text{ MHz} \leq B_C = 2 \text{ MHz}$$

(d) Como $p = 1/2$ podemos elegir tanto filtro apareado como receptor de correlación. En este caso vamos a utilizar un receptor de correlación. Por lo tanto, en recepción se tendrá algo de la forma:



El umbral óptimo en este caso es $V_T = 0$ puesto que los bits son equiprobables y la señalización es polar (A, -A).

(e) La energía de bit en recepción queda:

$$E_b = A_R^2 T$$

Para señalización polar, bits equiprobables y recepción óptima la probabilidad de error queda:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\text{SNR}_R}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A_R^2 T}{\eta}}\right)$$

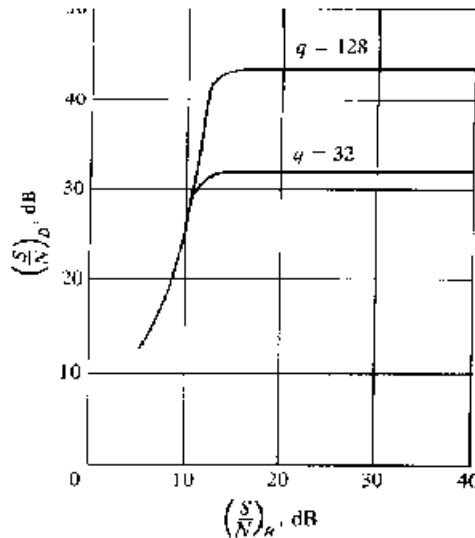
(f) Sabemos que, dependiendo del valor de P_e , el ruido de decodificación será más o menos relevante que el de cuantificación. Más específicamente, se tiene que:

$$\text{SNR}_D = \frac{3q^2 S_x}{\frac{2W}{f_s} + 4q^2 P_e}$$

Luego, dependiendo de la relación entre P_e y $\frac{2W}{4q^2 f_s}$, el valor de SNR_D será diferente. Así, se cumple:

- Si $P_e \ll \frac{2W}{4q^2 f_s}$, $\text{SNR}_D \approx \frac{3q^2 S_x f_s}{2W}$, independiente de la SNR_R .
- Si $P_e \gg \frac{2W}{4q^2 f_s}$, $\text{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{4P_e}$. Como $P_e = Q(\sqrt{\text{SNR}_R})$ (ya que se está trabajando con señalización polar y símbolos equiprobables), entonces se cumple que $\text{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{Q(\sqrt{\text{SNR}_R})}$.

En base a estas observaciones, podemos bosquejar la forma de SNR_D variando respecto a SNR_R :



La zona de trabajo óptima se tiene justo en el umbral, es decir, cuando $\text{SNR}_R \approx 18.5$.

(g) Como $\text{SNR}_R = \frac{A_R^2}{\eta B_T}$, entonces se debe cumplir que $A_R = \sqrt{18.5 \eta B_T}$. A su vez, $A_R = A_T / \sqrt{L}$, y entonces $A_T = \sqrt{18.5 \eta B_T L}$. La potencia de transmisión es $S_T = A_T^2$.