Sistemas de Comunicación
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

1ro. de julio de 2016

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [pts.]

Se desea transmitir una señal, que se modela como un proceso estocástico $x(t)$ de tiempo continuo, utilizando un sistema PCM binario. La señal tiene potencia 1 y un ancho de banda de aproximadamente 8 kHz. Se utilizará una codificación polar con amplitud A. El canal introduce un ruido AWGN de media nula.

(a) Calcular la cantidad de niveles necesarios para que la SNR_D sea superior a 100 dB, usando la mínima frecuencia de muestreo posible. Estimar el ancho de banda necesario.

(b) Dar una expresión para la máxima densidad espectral de potencia del ruido $\frac{\eta}{2}$ permitida en el canal en el caso en que se utilice un receptor con filtro apareado.

Se desea aprovechar el conocimiento de la estadística de la señal, para utilizar menor ancho de banda en la transmisión utilizando un sistema PCM diferencial de un retardo, variando la frecuencia de muestreo.

(c) Hallar una expresión para el ancho de banda de transmisión en función de la autocorrelación de la señal y de la frecuencia de muestreo, manteniendo la SNR_D de la parte (a).

(d) Explicar conceptualmente los factores que intervienen en el valor del ancho de banda. ¿Existe un mínimo? ¿Cómo lo determinaría?

Problema 2 [pts.]

Una fuente genera símbolos binarios equiprobables e independientes con una cadencia $r = \frac{1}{T}$. Éstos se envían por un canal bandabase conformados con un pulso $p(t) = \Pi(\frac{t-T/2}{T})$ y amplitudes $\pm A$. El ruido que se introduce en el canal se supondrá blanco gaussiano de media nula y densidad espectral de potencia $\eta/2$. Se desea analizar y comparar los posibles receptores óptimos para la recuperación de los símbolos.

(a) ¿Cuáles son los receptores óptimos que se pueden utilizar en este caso? Dar los respectivos diagramas de bloques de los receptores.

(b) ¿Cuál es la razón por la que se los denomina "receptores óptimos"?

(c) Calcular la probabilidad de error que se obtiene en cada caso si los umbrales de decisión adoptados son los óptimos.

Problema 3 [pts.]

Se tiene una fuente S_1 de cuatro símbolos con probabilidades $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$. Se quiere codificar la fuente S_1 para luego transmitirla por un sistema de comunicación.

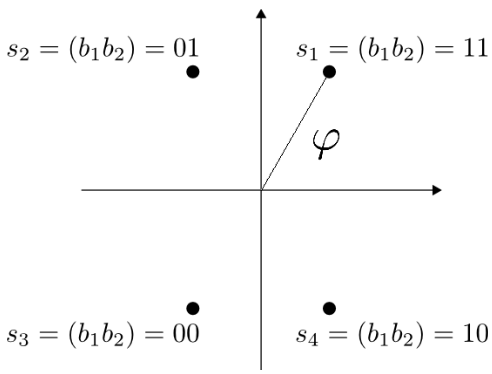
(a) Hallar un código de Huffman binario C_1 para la fuente S_1 y calcular su largo medio $L(C_1)$.

(b) Se tiene como alternativa emplear el siguiente código $C_2 = (00, 01, 10, 11)$. ¿Cuál de los dos códigos conviene utilizar? Justificar.

(c) Mostrar que el código C_1 hallado en (a) es óptimo para una fuente S_2 también de cuatro símbolos con probabilidades $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$.

Problema 4 [pts.]

Se quiere analizar el uso de una constelación QAM asimétrica. Este tipo de constelaciones permite brindar una protección diferencial a los bits en fase y en cuadratura lo que puede ser importante para aplicaciones multimedia. La siguiente figura muestra un esquema de una constelación donde se mapean los bits b_1 y b_2 en los símbolos s_1, s_2, s_3, s_4, φ pertenece al intervalo $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.



Supondremos que los bits de información tienen igual probabilidad y que la señal se trasmite sobre un canal de comunicaciones AWGN con densidad espectral de potencia del ruido $\eta/2$.

(a) Dibujar las regiones de decisión que minimizan la probabilidad de error de símbolo en función de φ.

(b) Dibujar el diagrama de bloques del trasmisor y el receptor correspondiente.

(c) Determinar las probabilidades de error del bit b_1 y b_2 en forma separada. ¿Cuál es el bit que está más protegido?. Discutir en función del valor de φ

(d) Determinar la probabilidad de error de símbolo en el receptor anterior como una función de E_s/η y φ.

(e) Asumir que $\eta = 10^{-6}$ W/Hz y $\varphi = \frac{\pi}{6}$. ¿Cuál es la potencia E_s necesaria si se quiere que la probabilidad de error en el bit b_1 sea menor igual a 10^{-3}?

Solución

Problema 1

(a)

$$SNR_D \approx 3q^2 S_x \geq 10^{10}$$

$$q \geq \sqrt{\frac{10^{10}}{3}} = 57735$$

$$q = 2^{16} = 65536 \geq 57735$$

Por el Teorema de Muestreo la frecuencia de muestreo debe ser mayor o igual a $2 \times 8Khz = 16000 muestras/seg$. La tasa de bits deberá ser entonces:

$$r = 16000 muestras/s \times 16 bits/muestra = 256\ Kbps$$

El ancho de banda es

$$B_T \geq \frac{r}{2} = 128\ KHz.$$

(b) Tomando el criterio de la $P_e \leq 10^{-5}$ para trabajar por encima del umbral. Al usar un filtro apareado,

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$$

Asumiendo una codificación polar,

$$E_b = A^2 T_b$$

Entonces

$$\frac{2A^2 T_b}{\eta} \geq 4.3^2 \Rightarrow \eta \leq \frac{2A^2 T_b}{18.5}$$

(c) Como se desea mantener la misma SNR_D:

$$\frac{SNR_{DPCM}}{SNR_{PCM}} = \frac{q^2_{DPCM}}{q^2_{PCM}} \times G_P = 1$$

La nueva tasa de bits será

$$r_{DPCM} = f_s \lceil \log_2 q_{DPCM} \rceil = f_s \left\lceil \log_2 \frac{q_{PCM}}{\sqrt{G_P}} \right\rceil$$

Además sabemos que

$$G_p = \frac{1}{1 - \frac{R_x(T_s)^2}{\sigma_x^4(0)}}$$

donde T_s es la nueva frecuencia de muestreo para codificar diferencialmente. Como se deben usar al menos 2 niveles de cuantificacion, el ancho de banda es

$$B_T \geq \frac{1}{2} f_s \left\lceil \log_2 \max\left(\left\lceil \frac{q_{PCM}}{\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{R_x^2(1/f_s)}{\sigma_x^4}}}} \right\rceil, 2 \right) \right\rceil$$

(d) La autocorrelación de la señal tiende a su potencia cuando el tiempo de muestreo disminuye. De esta manera la G_p tiende a infinito cuando f_s tiende a infinito. Sin embargo, cuando la $G_P \uparrow +\infty$ el $\log_2 \frac{q_{PCM}}{\sqrt{G_P}} \downarrow -\infty$ y la estimación anterior para el ancho de banda deja de ser cierta ya que se precisa al menos un bit de codificación. Es decir, $r_{DPCM} \geq f_s$ Al aumentar la frecuencia de muestreo, el término

$$\left\lceil \log_2 \max\left(\left\lceil \frac{q_{PCM}}{\sqrt{\frac{1}{1-\frac{R_x^2(1/f_s)}{\sigma_x^4}}}} \right\rceil, 2\right)\right\rceil$$

disminuye hasta llegar a valer 1, mientras que el término f_s aumenta en forma lineal con él mismo; el efecto combinado de estos términos hace que el ancho de banda tenga un mínimo para alguna frecuencia de muestreo y luego crezca proporcionalmete a f_s.
El mínimo se encuentra con los procedimientos usuales de análisis matemático.
Al aumentar f_s las muestras estan cada vez más correlacionas. A partir de cierto valor de f_s el modelo del ruido de cuantificación usado no es correcto y deja de ser válido lo que calculamos. Aquí hemos despreciado este fenómeno.

Problema 2

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) En el caso del *receptor de correlación* se tiene:

Si se envia un “1”:

$$y[k] = \int_0^T 2A^2\Pi\Big(\frac{t-T/2}{T}\Big)\Pi\Big(\frac{t-T/2}{T}\Big)dt = 2A^2T$$

Si se envia un “0”:

$$y[k] = \int_0^T -2A^2\Pi\Big(\frac{t-T/2}{T}\Big)\Pi\Big(\frac{t-T/2}{T}\Big)dt = -2A^2T$$

Como las operaciones realizadas son lineales, el rudio a la salida del integrador sera gaussiano, por lo que resta encontrar su media y potencia para caracterizarlo completamente.

$$m_n = E\Big\{\int_0^T n(t)\Pi\Big(\frac{t-T/2}{T}\Big)dt\Big\} = \int_0^T E\{n(t)\}\Pi\Big(\frac{t-T/2}{T}\Big)dt = 0$$

$$\sigma_n = \Big\{\int_0^T n(t)2A\Pi\Big(\frac{t-T/2}{T}\Big)dt \cdot \int_0^T n(s)2A\Pi\Big(\frac{s-T/2}{T}\Big)ds\Big\} = 4A^2E\Big\{\int_0^T n(t)dt \cdot \int_0^T n(s)ds\Big\} =$$
$$4A^2\int_0^T\int_0^T E\{n(t)\cdot n(s)\}ds = 4A^2\int_0^T\int_0^T R_n(t-s)ds$$

Además como el ruido es blanco gaussiano de media nula y densidad espectral de potencia $\eta/2$ se tiene que $R_n(t-s) = \frac{\eta}{2}\delta(t-s)$.

De donde:

$$\sigma_n = 4A^2\int_0^T \frac{\eta}{2}dt = 2A^2\eta$$

Como los símbolos son equiprobables y el umbral de decisión es el óptimo ($V_t = 0$), la probabilidad de error es:

$$P_e = Q\left(\frac{2A^2T - 0}{\sqrt{2A^2T\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}}\right)$$

En el caso del *filtro apareado*: $h(t) = 2A\Pi\Big(\frac{T_d - t + T/2}{T}\Big)$ se tiene:
Si se envía un "1":

$$y[k] = h(Td + T) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\Pi\Big(\frac{s - T/2}{T}\Big)h(s - Td - T)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} A\Pi\Big(\frac{s}{T}\Big)2A\Pi\Big(\frac{T_d - T/2}{T}\Big)ds = 2A^2T$$

Si se envía un "0" la prueba es análoga:

$$y[k] = -2A^2T$$

Para caracterizar el ruido, utilizamos el hecho de que el filtro h es lineal por lo que es válido:

$$\sigma_n = \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2\frac{\eta}{2}df = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2df = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta}{2}4A^2T = 2A^2T$$

Además se tiene:

$$m_n = E\Big\{\int_{-\infty}^{+\infty} n(Td + T)h(s - Td - T)dt\Big\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{n(Td + T)\}h(s - Td - T)dt = 0$$

Como los símbolos son equiprobables y el umbral de decisión es el óptimo ($V_t = 0$), la probabilidad de error es:

$$P_e = Q\left(\frac{2A^2T - 0}{\sqrt{2A^2T\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{\eta}}\right)$$

De donde la performance es la misma para ambos receptoes.

Problema 3

(a) Un posible código de Hufman para la fuente S es

$$(a, b, c, d) \mapsto (0, 10, 110, 111).$$

El cual se calculó siguiendo el algoritmo propuesto por Huffman, ver teórico. El largo medio para este código es,

$$L = \sum_x p(x)l(x) = \frac{3}{5} + 2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{10} + 3\frac{1}{10} = 1,6.$$

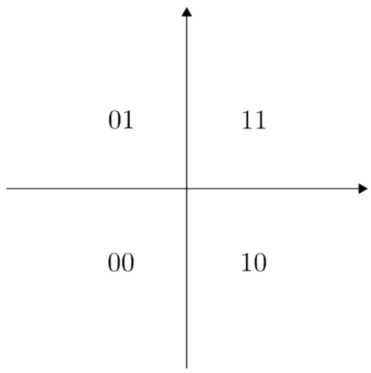
(b) El largo medio que se obtiene de codificar la fuente S_1 utilizando el código $(00, 01, 10, 11)$ es 2, ya que todos los símbolos se codifican con palabras de ese largo.
El código de Huffman cumple la propiedad de minimizar el largo medio dada una fuente, como se verifica numéricamente. Por otro lado, dicho código es instantáneo, esto quiere decir que cada palabra puede decodificarse al momento en que se recibe.

(c) El código de Huffman para la fuente S_2 es igual al código para la fuente S_1 (por construcción). Para S_2 además el largo medio es igual a la entropía de la fuente, cumpliendo con la cota del primer Teorema de Shannon por lo cuál es óptimo.

Problema 4

(a) Las regiones de decisión son las mismas que para QPSK.

(b) El diagrama de bloques del transmisor es similar al de QPSK con la diferencia que los bits previo a ser conformados van multiplicados por las amplitudes correspondientes (en fase y cuadratura) para generar la asimetría en la constelación. El diagrama de bloques del receptor es el mismo que para QPSK.



(c)

$$P_e^{b_1} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b_1}}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s\cos\varphi}{\eta}}\right)$$

$$P_e^{b_2} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{b_2}}{\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s\sin\varphi}{\eta}}\right)$$

Para $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ el bit más protegido es b_1, pues puesto que está más lejos del límite de la región de decisión. De manera análoga, para $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ el bit mas protegido es b_2. En el caso particular $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ambos bits tienen igual probabilidad de error.

(d)

$$P_e^s = 1 - (1 - P_e^{b_1})(1 - P_e^{b_2}) \approx P_e^{b_1} + P_e^{b_2}$$

$$P_e^s \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_s\cos\varphi}{\eta}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s\sin\varphi}{\eta}}\right)$$

(e)

$$P_e^{b_1} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s\cos\varphi}{\eta}}\right)$$

De tabla se obtiene que $Q(k) < 10^{-3} \rightarrow k_{min} = 3.1$. Despejando E_s se obtiene $E_s \geq \frac{k_{min}^2\eta}{2\cos\varphi} = 5.55\ \mu\text{W/Hz}$.