# Sistemas de Comunicación
# Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

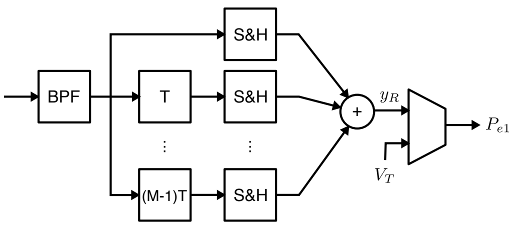
7 de julio de 2015

**Indicaciones:**

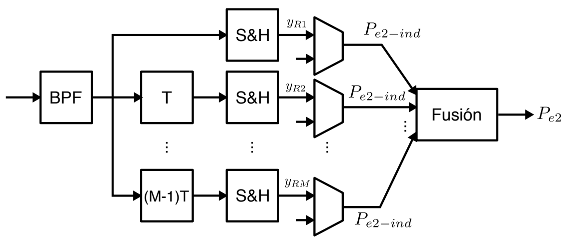
- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

## Problema 1 [20 pts.]

Se considera el sistema de transmisión digital binario en bandabase que se muestra en la figura. El sistema trabaja con una codificación con redundancia que corresponde a enviar $M$ veces cada bit. Se desea analizar dos esquemas diferentes de recepción indicados en la figura. Por un lado se considera la acumulación de $M$ muestras y luego una única instancia de decisión. Por otro lado se considera un esquema con $M$ comparadores para cada uno de los bits redundantes enviados y luego la decisión se hace por mayoría fusionando las $M$ decisiones individuales (considerar $M$ impar en todo el problema). Ambos receptores tienen un filtro pasabajos de frecuencia de corte $B_T$, suponer que la amplitud del pulso recibido no es afectada por el receptor en el instante de muestreo. El canal se considera que tiene atenuación $L$ en potencia e introduce ruido AWGN de media nula y potencia $\eta/2$. Los bits se consideran equiprobables y la codificación es polar A/2 y -A/2, mientras que el conformador trabaja con pulsos rectangulares de ancho $T$ y amplitud unitaria.




Opción 1




Opción 2

(a) Escribir la expresión temporal de la señal transmitida $x_T(t)$.

(b) Hallar y graficar el espectro de $x_T(t)$.

(c) Para la opción 1, determinar las características de $y_R(MT)$, valor que toma la señal muestreada que entra al comparador, identificando las componentes de señal y ruido.

(d) Para la opción 2, determinar las características de $y_{R_m}(T)$, valor que toma una cualquiera de las $m$ señales individuales muestreadas que entran al correspondiente comparador, identificando las componentes de señal y ruido.

(e) Calcular la probabilidad de error $P_{e_1}$ para la opción 1.

(f) Calcular la probabilidad de error $P_{e_{2-ind}}$ para la opción 2 de la decisión en cada comparador.

(g) Calcular la probabilidad de error $P_{e_2}$ para la opción 2 al combinar la salida de los $M$ comparadores.

(h) Comparar ambos esquemas de recepción para $M = 5$, $L = 10^3$, $\eta = 10^{-8}$ W/Hz, $A = 1$, $B_T = 10$ MHz e indicar cuál es más conveniente en este caso. ¿Influye en algo el ancho del pulso conformador $T$ al comparar ambos esquemas? Justificar.

## Problema 2 [10 pts.]

Considerar un canal de TV digital terrestre abierta que utiliza el modo de transmisión HDTV+OneSeg de la norma ISDB-T adoptada en Uruguay. En la norma, el canal de 6 Mhz se divide en 14 segmentos, cada uno de 428 kHz, un segmento se utiliza para TV de baja definición (LDTV), de allí el nombre OneSeg, y doce segmentos para HDTV, el restante no se utiliza. La modulación utilizada en el servicio OneSeg es QPSK y en cada segmento utilizado para HDTV se modula con 64-QAM. Considerar que los símbolos son conformados con pulsos de Nyquist con factor de roll-off $\rho$ y que el ruido introducido en el canal es AWGN con $\eta = 10^{-6}$ W/Hz.

(a) Dibujar la constelación de las dos modulaciones utilizadas.

Para el servicio OneSeg se pide:

(b) Hallar la máxima tasa de transferencia $r_b$ en bits/seg y la eficiencia espectral.

(c) Dar el diagrama de bloques de un receptor coherente. Explicar cada bloque y los parametros que lo definen.

## Problema 3 [20 pts.]

Una señal $x(t)$ de ancho de banda $W$ y potencia $S_x = 1$ debe ser transmitida por un canal que introduce una atenuación en potencia $L$ y ruido aditivo, blanco y gaussiano, de densidad espectral de potencia $\eta/2$. Se deben comparar dos sistemas: PCM y DPCM con un predictor lineal de orden 2.

El primer sistema es un PCM binario de cuantificación uniforme, con $q$ niveles y una frecuencia de muestreo $f_s = 1.2 f_{\text{mín}}$, donde $f_{\text{mín}}$ es la frecuencia de Nyquist.

(a) Dar un diagrama de bloques del sistema completo.

(b) Encontrar condiciones para trabajar sobre el umbral PCM.

(c) Determinar el mínimo ancho de banda de transmisión necesario para obtener una $\text{SNR}_D$ de 60 dB. ¿Cuál sería el $q$ necesario?

El segundo sistema agrega a lo anterior un predictor de la forma $\hat{x}[n] = a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2]$ para obtener un sistema PCM diferencial.

(d) Dar un diagrama de bloques del sistema completo.

(e) Determinar una expresión para el error cuadrático medio de predicción.

(f) Dar una expresión para la ganancia del predictor.

De aquí en más asumiremos que la señal muestreada tiene una autocorrelación $R_x[n] = 1 - \frac{|n|}{4}$ para $n$ entre -4 y 4, y que vale cero para otros valores.

(g) Determinar la ganancia de predicción cuando la predicción es el promedio de las dos últimas muestras.

(h) Encontrar la ganancia de predicción con $a_1 = \frac{6}{7}$ y $a_2 = -\frac{1}{7}$.

(i) Encontrar los anchos de banda mínimos de transmisión para obtener una $\text{SNR}_D$ de 60 dB para los dos predictores anteriores. ¿Cuál sería el valor de $q$ en cada caso?

(j) Comparar los tres sistemas propuestos.

# Solución

## Problema 1

**(a)** $x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \sum_{m=0}^{M-1} p_k(t-kmT)$

**(b)** Dado que $x_T(t)$ es una señal PAM, para determinar su espectro usamos la función del espectro de una PAM con símbolos equiprobables (media nula).

$$X_T(f) = \frac{A^2}{4T}|P(f)|^2 = \frac{A^2}{4T}T^2\text{sinc}^2(fT) = \frac{A^2T}{4}\text{sinc}^2(fT)$$

**(c)** La componente de señal queda $y_R(MT) = \frac{MA}{2\sqrt{L}}$ si el bit enviado fue un 1 o $y_R(MT) = -\frac{MA}{2\sqrt{L}}$ si el bit enviado fue un 0. La componente de ruido tiene media nula y potencia $M\eta B_T$.

**(d)** La componente de señal queda $y_{R_m}(T) = \frac{A}{2\sqrt{L}}$ si el bit enviado fue un 1 o $y_{R_m}(T) = -\frac{A}{2\sqrt{L}}$ si el bit enviado fue un 0. La componente de ruido tiene media nula y potencia $\eta B_T$.

**(e)**

$$P_{e_1} = Q\left(\frac{MA}{\sqrt{M\eta B_T L}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{M}A}{\sqrt{\eta B_T L}}\right)$$

**(f)**

$$P_{e_{2-ind}} = Q\left(\frac{A}{\sqrt{\eta B_T L}}\right)$$

**(g)** Para que la decisión sea equivocada en este caso, debo cometer un error en al menos la mitad más uno de los comparadores. Según si $M$ es par o impar, esto significa que debo equivocarme en al menos $M/2+1$ o $(M+1)/2$ decisiones respectivamente.
De esta forma, si es $M$ es par la $P_{e_2}$ queda:

$$P_{e_2} = \sum_{k=M/2+1}^{M} C_k^M {P_{e_{2-ind}}}^k \left(1 - P_{e_{2-ind}}\right)^{M-k}$$

Mientras tanto, si $M$ es impar la $P_{e_2}$ queda:

$$P_{e_2} = \sum_{k=(M+1)/2}^{M} C_k^M {P_{e_{2-ind}}}^k \left(1 - P_{e_{2-ind}}\right)^{M-k}$$

**(h)** Con los valores de los parámetros el cálculo queda:

$$P_{e_1} = 7.8270 \times 10^{-4}$$

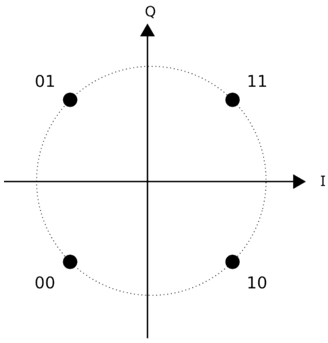
$$P_{e_2} = 4.3092 \times 10^{-3}$$

por lo que el esquema de la opción 1 es claramente más conveniente en este caso.

El parámetro $T$ no incide en la comparación de ambos esquemas ya que la probabilidad de error no depende de este parámetro en ninguno de los casos.

# Problema 2

**(a)**




QPSK

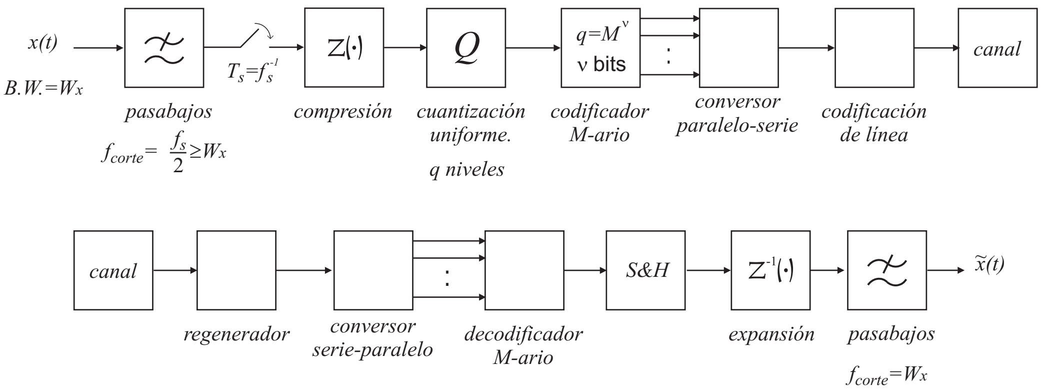
**(b)**

$$B_T = \frac{r_b}{M}(1+\rho)$$

donde $B_T = 428$ kHz y $M = 2$ para QPSK.

# Problema 3

**(a)**




Notar el filtro luego del cuantizador, para eliminar ruido de cuantización fuera del rango de la señal, ya que se muestrea a una frecuencia 1.3 veces mayor de la de Nyquist.

**(b)** Para trabajar sobre el umbral PCM, la probabilidad de error de bit debe cumplir

$$4q^2 P_e \ll \frac{f_{\text{mín}}}{f_s}$$

donde el término $\frac{f_{\text{mín}}}{f_s}$ tiene en cuenta la disminución del ruido de cuantización al utilizar una frecuencia de muestreo mayor a la mínima necesaria, y luego filtar para dejar sólo la zona de trabajo, eliminando parte del ruido de cuantización.

**(c)** Trabajando sobre el umbral, la $\text{SNR}_D$ es $\frac{f_s}{f_{\text{mín}}} 3q^2 S_x$. De aquí obtenemos

$$q \geq \sqrt{\text{SNR}_D \frac{f_{\text{mín}}}{3 f_s S_x}} = 527.$$

Como usaremos PCM binario, precisamos $q$ de la forma $2^n$, por lo que tomaremos $n = 10$ con $q = 1024$. Esto nos lleva a usar 10 símbolos binarios para codificar cada muestra, es decir, una tasa de símbolos de $r = 10f_s = 10 \cdot 1.2 \cdot 2 \cdot W$. El ancho de banda mínimo necesario es $r/2$.

**(e)** El error cuadrático medio de predicción es

$$\varepsilon = \mathbb{E}\Big\{\big(x[n] - \hat{x}[n]\big)^2\Big\} = \mathbb{E}\Big\{\big(x[n] - a_1 x[n-1] - a_2 x[n-2]\big)^2\Big\}$$

$$\varepsilon = (1 + a_1^2 + a_2^2)R_x[0] + (2a_1a_2 - 2a_1)R_x[1] - 2a_2R_x[2]$$

**(f)**

$$G_p = \frac{S_x}{\varepsilon} = \frac{1}{(1 + a_1^2 + a_2^2)R_x[0] + (2a_1a_2 - 2a_1)R_x[1] - 2a_2R_x[2]}$$

**(g)** Hacer el promedio de las últimas dos muestras es elegir ambos coeficientes, $a_1$ y $a_2$, con valor 0.5. Evaluando la expresión anterior,

$$G_{p1} = \frac{1}{(1 + 0.5^2 + 0.5^2)1 + (2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 - 2 \cdot 0.5)\frac{3}{4} - 2 \cdot 0.5 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}1 - \frac{1}{2}\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2}}$$

$$G_{p1} = \frac{8}{5} = 1.6$$

**(h)** Debemos encontrar los valores de $a_1$ y $a_2$ que minimizan $\varepsilon(a_1, a_2)$. En estos puntos debe cumplirse que

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} = 0.$$

Esto nos da el siguiente sistema de ecuanciones:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = 2a_1R_x[0] - 2R_x[1] + 2a_2R_x[1] = 0 \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} = 2a_2R_x[0] - 2R_x[2] + 2a_1R_x[1] = 0$$

que es igual a

$$a_1R_x[0] + a_2R_x[1] = R_x[1] \qquad a_1R_x[1] + a_2R_x[0] = R_x[2].$$

Si sustituímos los valores de $R_x$ nos quedamos con

$$a_1 + \frac{3}{4}a_2 = \frac{3}{4} \qquad \frac{3}{4}a_1 + a_2 = \frac{1}{2}$$

con solución

$$a_1 = \frac{6}{7} \qquad a_2 = -\frac{1}{7}.$$

Sustituyendo en la fórmula de la ganancia obtenemos

$$G_{p2} = 2.333.$$

**(i)** Trabajando sobre el umbral, y con ganancia de predicción $G_p$, la relación señal a ruido es

$$SNR_D = G_p \frac{f_s}{f_{\text{mín}}} 3q^2 S_x$$

Con lo que

$$q > \sqrt{\frac{SNR_D f_{\text{mín}}}{3f_s S_x G_p}}$$

Para los sistemas propuestos, con $G_{p1} = 1.6$ y $G_{p2} = 2.333$ obtenemos

$$q_1 > 416.6 \qquad q_2 > 345.05$$

y al usar $q$ de la forma $2^n$, debemos tomar, en ambos casos, $n = 9$. El ancho de bamda es $B_T = 9 \times 1.2W = \frac{9}{10}B_{TPCM}$

**(j)** Por las características del problema, las dos soluciones con predicción utilizan un ancho de banda de transmisión menor por lo que tenemos una mejora utilizando $\frac{9}{10}$ del ancho de banda anterior.
Se podría obtener mayores ventajas con los sistemas que utilizan predicción si dejaramos de lado la exigencia de muestrear a 1.2 veces la frecuencia de Nyquist: la predicción nos da margen para poder seguir trabajando sobre el umbral PCM aún utilizando frecuencias de muestreo menores. Esto disminuiría la $SNR_D$, efecto que compensamos con la ganacia de predicción, y bajaría más la tasa de símbolos $r$ que requiere menor ancho de banda de transmisión.