Sistemas de Comunicación
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Jueves 10 de julio de 2014

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

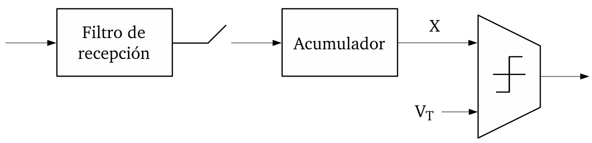
Problema 1 [18 pts.]

Se trasmite una señal binaria a_k que toma valores A y $-A$ correspondientes a '1' y '0' lógicos, equiprobables e independiente de los valores anteriores. Para la transmisión se utiliza un pulso conformador $p(t)$. El canal introduce ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\eta/2$.

(a) Hallar una expresión para la potencia media de la señal trasmitida S_T en función de la energía del pulso E_p.

(b) Comparar el umbral de decisión óptimo V_T y la probabilidad de error de bit P_e, cuando el filtro de recepción es un filtro apareado o un filtro pasabajos, y $p(t)$ es rectangular NRZ.

El sistema se modifica y se trasmite cada dígito m veces consecutivas. El receptor las suma (acumula) antes del comparador según el esquema de la siguiente figura. Se supondrá de aquí en adelante que $p(t)$ es un pulso rectangular NRZ y que el filtro de recepción es un filtro apareado.



(c) Hallar las densidades de probabilidad $f_X(x|0)$, $f_X(x|1)$, especificando los momentos estadísticos. Graficar las densidades de probabilidad.

(d) Elegir el umbral de decisión V_T para el caso equiprobable, calcular la probabilidad de error y la potencia media transmitida.

(e) Explicar cómo, manteniendo una misma probabilidad de error en el segundo esquema, la amplitud A puede ser menor que en el primer esquema. ¿Implica alguna mejora? ¿Tiene contrapartida?

Problema 2 [18 pts.]

Se desea enviar una señal analógica $x(t)$ utilizando un sistema PCM binario. La señal $x(t)$ está normalizada ($|x(t)| < 1$), con $R_x(\tau) = \text{sinc}^2(W_x\tau)$ donde $W_x = 5$ kHz. El canal cumple con las hipótesis habituales, con una densidad espectral de potencia $\eta/2$, siendo $\eta = 10^{-6}$ Watts/Hz y atenuación $L = 5$ en potencia. Para transmitir por el canal se utiliza señalización polar y pulsos rectangulares. En el receptor se utiliza un filtro pasabajos de ancho de banda B_T. Se supondrá que la cuantificación es uniforme. La frecuencia de muestreo se elige como $f_s = 1.5\times f_N$, siendo f_N la frecuencia de muestreo mínima para que el sistema funcione correctamente. Se trabaja sobre el umbral de PCM y se requiere una SNR_D de 50 dB.

(a) Dar el diagrama de bloques del trasmisor de un sistema PCM binario, explicando la función de cada uno de los bloques.

(b) Enunciar la condición necesaria para que el desempeño del sistema sea independiente del ruido introducido en el canal de transmisión. Bosquejar la SNR_D en función de la SNR_R, paramétrico en el número de niveles q, indicando el punto de trabajo óptimo. Justificar.

(c) Determinar el número de niveles q necesario y calcular el ancho de banda B_T mínimo.

(d) Hallar la potencia de transmisión S_T mínima considerando una probabilidad de error $P_e \leq 10^{-4}$.

Se supone ahora, que se utiliza DPCM binario con un predictor de un retardo, en vez de PCM binario.

(e) Indicar los cambios necesarios en el diagrama de bloques del transmisor.

(f) Calcular el valor óptimo del coeficiente de predicción.

(g) Determinar el nuevo mínimo número de niveles q' y el ancho de banda B'_T necesario.

Problema 3 [14 pts.]

Se dispone de una línea telefónica para transmitir información digital a una tasa r_b baudios (bps); la banda útil de la línea se encuentra entre 300 Hz y 3 kHz. La tasa de transferencia de información debe ser de la forma $r_b = 2^N r_0$ con $r_0 = 2400$ baudios y N entero. Para la transmisión se utilizará un pulso de Nyqvist de la familia del coseno elevado con coeficiente de roll-off ρ. La señal es contaminada en el canal con ruido aditivo, gaussiano, blanco de densidad espectral de potencia $\frac{1}{2}\eta$. Para la recepción se utilizará un receptor coherente. Se analizará el uso del espectro y la velocidad de transmisión para 16-PSK y 16-QAM.
Para cada una de las modulaciones propuestas:

(a) Dar una expresión para las señales temporales transmitidas en cada uno de los casos.

(b) Dar un diagrama de bloques del transmisor y del receptor.

(c) Dibujar la constelación correspondiente.

(d) Comparar la eficiencia espectral de ambas modulaciones y comentar cómo varía con ρ.

(e) Determinar la energía de bit E_b para transmitir con una probabilidad de error menor a 10^{-5} con $\eta = 4 \times 10^{-6}$W/Hz.

Solución

Problema 1

(a) Podemos hallar la potencia media de la señal, planteando su densidad espectral de potencia e integrándola entre $-\infty$ y $+\infty$. La señal es un PAM por lo que su densidad espectral de potencia es:

$$G(f) = \sigma_{a_k}^2 \, r |P(f)|^2 + (m_{a_k} \, r)^2 \sum_n |P\,(n\,r)|^2 \, \delta(f - nr)$$

donde $r\,T = 1$.

(b) Sea v el umbral de decisión. Se tiene entonces:

$$P_e = P_0 \; P_{e_0} + P_1 \; P_{e_1} = (1-q) \; P_{e_0} + q \; P_{e_1} \Rightarrow P_{e,min} / \left. \frac{\partial P_e}{\partial v} \right|_{min} = 0$$

$$\left. \begin{array}{rcl} P_{e_0} & = & \int_v^{+\infty} f_X(x|0)dx \\ P_{e_1} & = & \int_{-\infty}^{v} f_X(x|1)dx \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = (1-q)\frac{\partial P_{e_0}}{\partial v} + q\frac{\partial P_{e_1}}{\partial v}$$

Donde $P_{e_0} = Q(\frac{A_1+v}{\sigma})$ y $P_{e_1} = Q(\frac{A_1-v}{\sigma})$ siendo $\pm A_1$ los valores luego del filtro acoplado en el instante de comparación y σ^2 la potencia del ruido en ese mismo punto.
Entonces se tiene:

$$(1-q)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(A_1+V_T)^2}{2\sigma^2} \right\} = q\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(A_1-V_T)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Aplicando el logaritmo y operando se obtiene:

$$V_T = \frac{A_1 - A_1}{2} + \frac{\ln\left(\frac{1}{q} - 1\right)}{2A_1\sigma^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{q} - 1\right)}{2A_1\sigma^2}$$

Con $q = 0,5 \Rightarrow V_T = 0$ y $P_e = Q(\frac{A_1}{\sigma})$
Resta solo calcular A_1 e σ para ambos filtros de recepción.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 G_n(f) df = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df$$

$$A_1 = Ap(t) * h_R(t)|_{t=t_{op}}$$

Para el caso de filtro apareado:

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{-\infty} |P(f)|^2 df = \frac{\eta}{2}\int_{-\infty}^{-\infty} |p(t)|^2 dt = \frac{\eta}{2}T_b$$

Dónde T_b es el largo del pulso $p(t)$

$$A_1 = AT_b\Lambda(\frac{t}{T_b})|_{t=t_{op}} = AT_b$$

$$\frac{A_1}{\sigma} = \frac{AT_b}{\eta/2T_b} = \frac{2A}{\eta}$$

Para el caso de filtro LPF:

Tomamos como ancho de banda la mitad del lóbulo principal del sinc (espectro de la PAM): $H_R(f) = T_b\Pi(fT_b)$

$$\sigma^2 = \frac{\eta}{2}\int_{-1/2T_b}^{1/2T_b} T_b^2 df = \frac{\eta}{2}T_b$$

$$A_1 = A\int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t/T_b)sinc(t/T_b)dt = A\int_{-T_b/2}^{T_b/2} sinc(t/T_b)dt = AT_b\int_{-1/2}^{1/2} sinc(x)dx = AT_b l$$

Donde $l = \int_{-1/2}^{1/2} sinc(x)dx < 1$

$$\frac{A_1}{\sigma} = \frac{AT_b l}{\eta/2T_b} < \frac{2A}{\eta}$$

Por lo que la probabilidad de error es menor para el caso del filtro apareado.

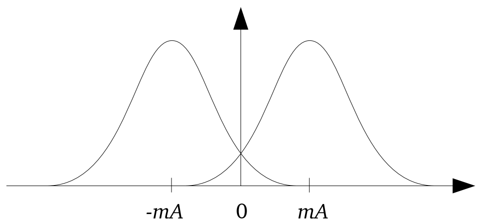
(c) Al repetirse cada dígito m veces consecutivas, a la entrada del comparador se tiene la señal $v'[k]$ igual a:

$$v'[k] = x[k] + n[k] + x[k-1] + v[k-1] + \cdots + x[k-m+1] + n[k-m+1] = mx[k] + n'[k]$$

Luego, si se transmite un 0, se tiene que $v'[k] = -mA + n'[k]$, mientras que si se transmite un 1, $v'[k] = mA + n'[k]$.
$n'[k]$ es la suma de ruido blanco de media nula y varianza σ^2. Por lo tanto, suponiendo que los $n[i]$ son independientes, la varianza de $n'[k]$ es igual a $m\sigma^2$, y su media es la suma de las medias de cada $n[i]$, que vale 0. En consecuencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} f_{X'}(v'|0) &\sim N(-mA, \sqrt{m}\sigma) \\ f_{X'}(v'|1) &\sim N(mA, \sqrt{m}\sigma) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la siguiente figura.



(d) Nuevamente, dado que la forma de las dos curvas de densidad de probabilidad es idéntica, se cumple que el umbral óptimo es equidistante de las dos medias, y por lo tanto vale:

$$u = \frac{mA + (-mA)}{2} = 0$$

Entonces, se cumple que:

$$P_e = Q\left(\frac{mA}{\sqrt{m}\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{m}A}{\sigma}\right) < Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

La potencia transmitida en este caso es la misma que en el caso anterior, ya que existe la misma probabilidad de enviar 0 y 1, y por lo tanto:

$$S_T = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}(-A)^2 = A^2$$

(cabe notar que a lo largo de todo este ejercicio se supuso un canal sin atenuación por lo que $S_T = S_R$).

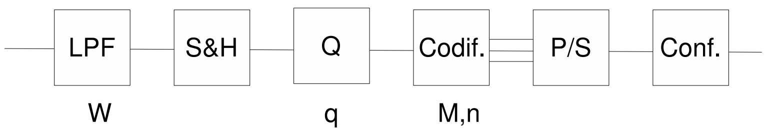
(e) Para mantener la P_e del primer esquema, se debe cumplir que:

$$\frac{\sqrt{m}A'}{\sigma} = \frac{A}{\sigma} \Rightarrow A' = \frac{A}{\sqrt{m}}$$

La mejora consiste en que la nueva potencia transmitida es $S'_T = A'^2 = \frac{A^2}{m}$, m veces menor que la anterior. Sin embargo, esta opción tiene como contrapartida que la tasa de transferencia de símbolos se reduce en m veces también, o sea m veces más tiempo en transmitir la misma información.

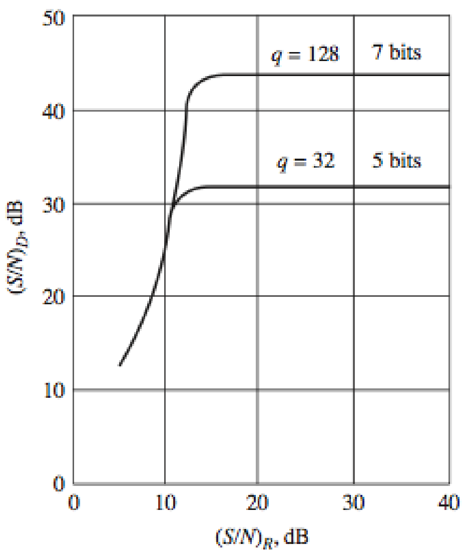
Problema 2

(a)



(b) Para que el sistema trabaje sobre el umbral, el ruido de cuantificación debe predominar frente al ruido de decodificación:

$$\sigma_q^2 \gg \sigma_d^2$$



Noise performance of PCM for different quantization levels.

Se trabaja en el codo de la curva cuando la SNR_D es constante. En esta zona se tiene menor potencia de transmisión y la misma SNR_D que con potencias de trasmisión mayores (para las cuales no aumenta la SNR_D).

(c)

$$\text{SNR}_D = 3q^2 \frac{f_s}{2W} = 60\,dB$$

$$q = 2^n \geq \sqrt{\frac{10^5}{3 \cdot 1.5}} = 149$$
$$\Rightarrow q = 256 = 2^n \Rightarrow n = 8$$
$$B_T \geq n f_s/2$$
$$B_T^{\text{mín}} = 8 \cdot 1.5 \cdot 5 \text{ kHz} = 60 \text{ kHz}$$

(d)

$$P_e = Q(\sqrt{\text{SNR}_R}) \geq 10^{-4} \Rightarrow \text{SNR}_R \geq (3.7)^2$$
$$\text{SNR}_R = \frac{S_T}{\eta L B_T} \Rightarrow S_T = \text{SNR}_R \eta L B_T$$
$$S_{T_{min}} = 4.1 \text{ Watts}$$

(e) El bloque de cuantificación es el que cambia, ya que ahora se realimenta con la señal cuantizada y lo que se codifica es la diferencia con la muestra anterior.

(f) $x[k] = ax[k-1]$ con $a = \rho_x[1] = \frac{R_x[1]}{R_x[0]}$. $R_x[0] = 1$ y $R_x[1] = 0.684$, por lo tanto $a = 0.684$.

(g) La nueva q' debe cumplir $q' = q/\sqrt{G_P}$ donde

$$G_P = \frac{1}{1 - \rho_x^2[1]}$$

Con $\rho_x[1] = 0.684$ queda $G_P \approx 1.88$ y despejando q' se llega a:

$$q' = 2^{n'} \geq 149/\sqrt{1.88} \approx 109$$
$$\Rightarrow q' = 128 \Rightarrow n' = 7$$

$$B_T' \geq n' \frac{f_s}{2} \Rightarrow B_T' = 7 \cdot 1.5 \cdot 5 \text{ kHz} = 52.5 \text{ kHz}$$

Problema 3

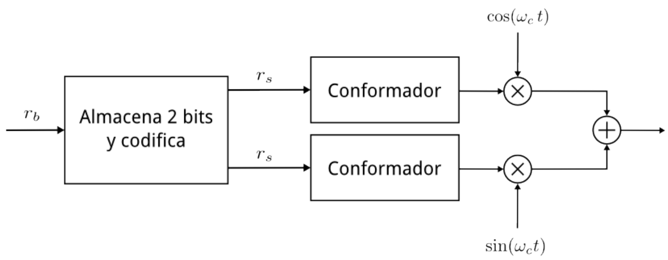
(a) Para QPSK cada señal (en fase y cuadratura) es onda binaria aleatoria polar conformada con el pulso de Nyqvist seleccionado (por ρ). Esto es, un bit en fase y otro en cuadratura que generan la señal cuaternaria.
Para M-QAM cada señal (en fase y cuadratura) es una señal onda cuaternaria aleatoria, es decir, dos bits en fase y dos bits en cuadratura, que definen las amplitudes de los pulsos conformados.

(b) Para QPSK el diagrama de bloques es Para 16-QAM queda

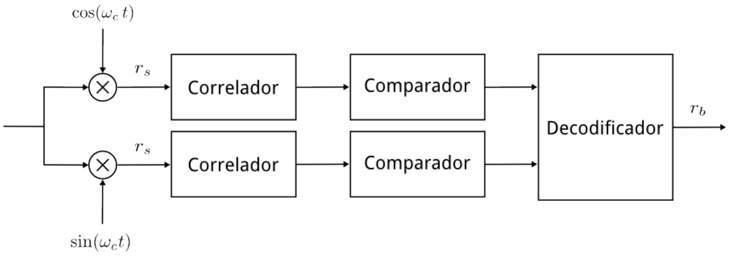
(c) Las constelaciones son las siguientes:

(d)

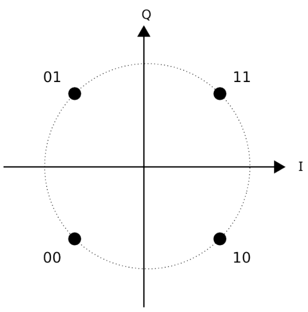
(e) Se desea obtener una probabilidad de error de $Pe_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \leq 10^{-5}$. Eso equivale a tener $\sqrt{2E_b/\eta} \geq 4.3 \Rightarrow E_b \geq 9.245\eta = 3.7 \times 10^{-5}$.



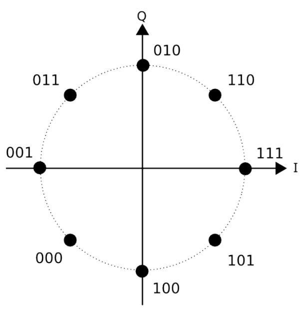
MOdulador



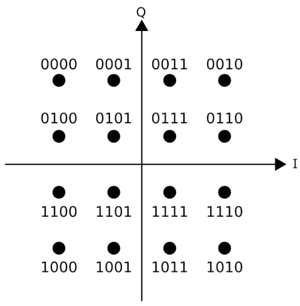
DEModulador



QPSK



8-PSK



16-QAM