# Sistemas de Comunicación
# Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Martes 9 de julio de 2013

**Indicaciones:**

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

## Problema 1 [20 pts.]

Se desea enviar una señal analógica $x(t)$ utilizando un sistema PCM M-ario con una $\mathrm{SNR}_D$ de 50 dB. La señal $x(t)$ está normalizada $|x(t)| < 1$, con $G_x(f) = \frac{1}{W_x}\Lambda(\frac{f}{W_x})$ donde $W_x = 5$ kHz. El canal cumple con las hipótesis habituales, con ancho de banda $B_T = 16$ kHz, $\eta = 10^{-6}$ Watts/Hz y atenuación $L = 5$ en potencia.
Para transmitir por el canal se utiliza señalización polar y pulsos rectangulares. Se recibe con un filtro pasabajos de ancho de banda $B_R$ adecuado.

(a) Dar el diagrama de bloques de un sistema PCM M-ario (trasmisor y receptor). Explicar la función de cada uno de los bloques.

(b) Bosquejar la $\mathrm{SNR}_D$ en función de la $\mathrm{SNR}_R$, paramétrico en el número de niveles $q$. Indicar el punto de trabajo óptimo. Justificar.

En lo que resta del ejercicio el sistema funcionará en el punto óptimo.

(c) Para la menor y mayor frecuencia de muestreo válidas y utilizando el menor $M$ posible, determinar el número de digitos $n$ y la tasa de transferencia de dígitos en bits por segundo $r_b$ para lograr la $\mathrm{SNR}_D$ pedida. Considerar $M = 2^\mu$.

De ahora en más se trabajará a la menor frecuencia de muestreo posible.

(d) Calcular la probabilidad de error $(P_e)$[1] si se utiliza una potencia de transmisión $(S_T)$ de 36 Watts.

Ahora se coloca un repetidor regenerativo en la mitad del canal, que transmite con potencia $S'_T =$ 12 Watts, y se disminuye la potencia del transmisor a $S_T = S'_T$.

(e) Calcular la $\mathrm{SNR}_R$ de cada tramo.

(f) Calcular la $P_e$ en el receptor. Justificar completamente su respuesta.

[1] Puede ser de utilidad la siguiente fórmula: $Pe = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\mathrm{SNR}_R}\right)$ y que $Q(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}k} e^{-k^2/2}$, cuando $k > 3$.

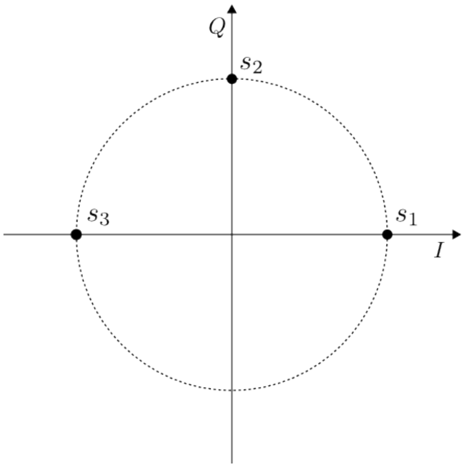
## Problema 2 [10 pts.]

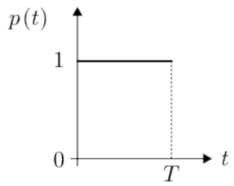
Un ingeniero amigo le propone un sistema ternario (tres símbolos posibles) que utiliza modulación en fase pasabanda, con la constelación que se muestra en la figura. Para enviar los símbolos $s_1$ y $s_3$ se transmite $\pm\, p(t)\cos(\omega_c t)$ mientras que para mandar el símbolo $s_2$ se transmite $p(t)\sin(\omega_c t)$.

(a) ¿Cuál es el ancho de banda de canal mínimo necesario para la correcta transmisión de los símbolos?

(b) Dibujar las regiones de decisión óptimas para detectar los símbolos.

(c) Existe una modulación en fase ternaria mejor que la propuesta por el ingeniero amigo. ¿Cuál es la constelación de ese sistema y cómo quedan las regiones de decisión óptimas en ese caso?




## Problema 3 [10 pts.]

El estándar ADSL2+ permite alcanzar una tasa de transferencia de bits al usuario (*downstream*) de hasta 24 Mbps utilizando 512 portadoras, cada una con un canal de ancho de banda de 4 kHz. Para alcanzar este máximo es necesario una modulación $M$-QAM de alta eficiencia espectral.

(a) Mostrar que con una modulación ASK binaria en cada portadora no se alcanza la máxima velocidad del estándar.

Para transmitir a una tasa de 3584 kpbs se utiliza una modulación 4-QAM. El canal cumple con las hipótesis usuales y se utiliza un receptor coherente.

(b) Diseñar el pulso de transmisión (amplitud y forma) para lograr una $P_e \leq 10^{-5}$ ocupando todo el ancho de banda disponible para cada portadora.

(c) ¿Cuál debe ser la eficiencia espectral de la modulación necesaria para alcanzar los 24 Mbps? Indicar el $M$ necesario para alcanzar esta velocidad.

## Pregunta [10 pts.]

(a) ¿Qué es la interferencia intersimbólica (ISI) y qué problemas genera en un sistema de comunicación?

(b) Dar las condiciones para la no existencia de ISI para la transmisión de una PAM en un canal de ancho de banda acotado $B < \infty$.

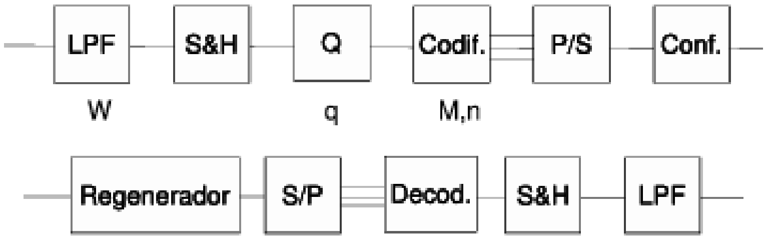
(c) Dar la forma genérica de los "pulsos de Nyqvist" y mostrar que verifican las condiciones dadas en (b).

(d) Calcular el ancho de banda mínimo necesario para transmitir un pulso de Nyquist de coseno elevado a una tasa de $r$ símbolos por segundo y con factor de *roll-off* $\rho$.

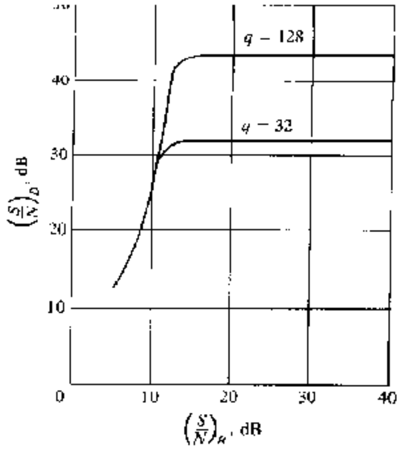
# Solución

## Problema 1

**(a)**




**(b)**




Se trabaja antes de la curva cuando la $\text{SNR}_D$ es constante. En esta zona se tiene menor potencia de transmisión y la misma $\text{SNR}_D$ que con potencias de trasmisión mayores (sin aumentar la $\text{SNR}_D$).

**(c)** El ancho de banda disponible debe cumplir $B_T \geq \frac{1}{2}nf_s$. Tomando la mínima $f_s = 2W_x = 10000$ Hz se tiene $B_T \geq nW_x \Rightarrow n \leq \frac{B_T}{W_x} = 3,2$. Entonces $n = 3$.

$$\text{SNR}_D = 3q^2 S_x \geq 10^5$$

La potencia de la señal la obtenemos como

$$S_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\mathrm{d}f = 1$$

De donde

$$M^n = 2^{\mu n} \geq q \geq \sqrt{\frac{10^5}{3}} = 183$$

Despejando $M$, con $n = 3$ queda

$$\mu \geq 2,5 \Rightarrow \mu = 3 \Rightarrow M = 8$$

Así $q = 8^3 = 512$.

$$r_b = \mu n f s = 9 \times 10000 = 90kbs$$

Si se toma la máxima $f_s$ para que $M$ sea mínima, entonces $n = 3$ y $fs = \frac{2B_T}{n} = 10667$ Hz.

$$\text{SNR}_D = 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W_x} \geq 10^5 \Rightarrow q \geq 177 \Rightarrow \mu \geq 2,48 \Rightarrow \mu = 3 \Rightarrow M = 8$$

$$r_b = \mu n f s = 9 \times 10667 = 9.6kbs$$

**(d)**

$$\text{SNR}_R = \frac{S_T}{L\eta B_R} = \frac{36}{5\times 10^{-6}15000} = 480$$

$Pe = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\text{SNR}_R}\right)$.

Para utilizar la aproximación $Q(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}k}e^{-k^2/2}$ debemos verificar que $\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\text{SNR}_R} > 3$.

$\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\text{SNR}_R} = \sqrt{\frac{3}{8^2-1}480} = 4.8$.

$Pe = \frac{2(M-1)}{M}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\text{SNR}_R}}e^{-\frac{3}{2(M^2-1)}\text{SNR}_R} = 1,6\times 10^{-6}$.

Corroboramos que estemos trabajando sobre el umbral: $P_e \ll \frac{M^2-1}{12q^2} = 2\times 10^{-5}$. Considerando que $P_e = 2\times 10^{-6}$ es la probabilidad de umbral, entonces estamos en las condiciones deseadas.

**(e)** Ambas $\text{SNR}_R$ son iguales a $\frac{S_T}{L(1/2)\eta 1/2 B_R} = \frac{S_T}{\eta\frac{1-L^{1/2}}{L^{-1}-1}B_R} = \frac{12}{\eta\frac{1-5^{1/2}}{5^{-1}-1}15K} = 517,24$

**(f)** Para el caso de un sistema M-ario con un repetidor regenerativo, se tiene que la $P_e$ en el receptor es: la probabilidad de equivocarse en el repetidor y no en el receptor, más la probabilidad de no equivocarse en el repetidor y sí en el receptor, más la probabilidad de equivocarse en ambos de forma tal que no se recupere el dígito original. Observar que en el caso binario este último término es nulo.

En definitiva $P_e = P_{e1}(1-P_{e2}) + P_{e2}(1-P_{e1}) + P_{e1}P_{e2}\alpha$, donde $0 < \alpha < 1$. Como $P_{e1} = P_{e2} = p \Rightarrow P_e = 2p - p^2(2-\alpha)$. El término $p^2 \ll p \Rightarrow P_e \approx 2p$. Ahora resta calcular $p$.

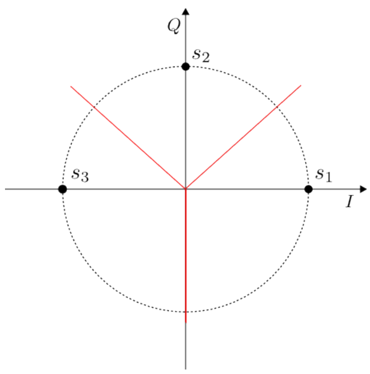
$$p = \frac{2(M-1)}{M}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{M^2-1}\text{SNR}_R}}e^{-\frac{3}{2(M^2-1)}\text{SNR}_R} = 6,3\times 10^{-7}$$

Observar que se puede utilizar la aproximación de la $Q$ y se está por arriba del umbral (ahora tenemos mayor $\text{SNR}_R$ que sin repetidor).

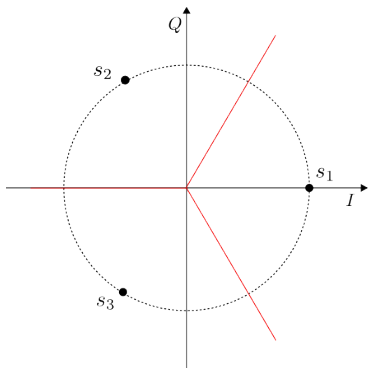
$$P_e = 2\times 6,3\times 10^{-7} = 1.26\times 10^{-6}$$

## Problema 2

**(a)** Cada símbolo, ya sea cuando va en fase ($s_1$ o $s_3$) o en cuadratura ($s_2$), tiene duración $T$. De acuerdo al criterio de Nyquist, para transmitir pulsos de ancho $T$ en banda base, el ancho de banda mínimo necesario es $1/2T$. En este caso, al ser pasabanda, el ancho de banda mínimo necesario queda el doble, es decir $1/T$.




**(b)**




**(c)**

## Problema 3

**(a)** La eficiencia espectral de ASK binario es 1 bps/Hz, por lo que la tasa de transferencia queda

$$r_{ASK} = 1 \times 4 \text{ kHz} \times 512 \text{ portadoras} = 2 \text{ Mbps}$$

**(b)** La tasa de transferencia para cada portadora es

$$r_b = \frac{3584 \text{ kbps}}{512} = 7 \text{ kbps}.$$

Utilizando un pulso de Nyqvist con rolloff $\rho$ y ancho de banda 4 kHz se debe cumplir

$$(1+\rho)\frac{r_b}{2} = 4 \text{ kHz}.$$

Despejando $\rho = 0.14$.
La probabilidad de error de bit para 4-QAM es

$$P_e = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \leq 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{\eta}} \sim 4.1$$

de donde puede despejarse $E_b \sim 33.6\eta$.

**(c)** La eficiencia espectral debe ser

$$EE = \frac{r_b}{B_C} = \frac{24000000}{512 \times 4000}\left[\frac{bps}{Hz}\right] \sim 11.7$$

Por lo tanto $M$ debe cumplir

$$M > 2^{11.7} \Rightarrow M = 2^{12} = 4096$$

## Pregunta

**(a)** Ver teórico.

**(b)** Ver teórico.

**(c)** Ver teórico.

**(d)**

$$B_T > \frac{r}{2}(1+\rho)$$