Sistemas de Comunicación
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Martes 3 de julio de 2012

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [20 pts.]

Se desea transmitir símbolos de una fuente binaria IID con bits equiprobables, generados a una tasa r. Para ello se utiliza un sistema de transmisión pasabanda BPSK con portadora f_c y pulso de conformación rectangular sin retorno a cero. El canal de transmisión es un cable coaxial que cumple con las hipótesis usuales, con parámetros L y η para una distancia d. El receptor también introduce un ruido AWGN con densidad espectral de potencia $\frac{1}{2}\eta_A$, y se considera predominante frente al ruido de canal. Ambos ruidos son procesos independientes entre sí y de todos los demás procesos del sistema.

(a) Dar un diagrama de bloques completo de un receptor basado en un receptor de correlación. Explicar cualitativamente el funcionamiento del receptor y las hipótesis asumidas.

(b) Estimar el ancho de banda B_T y bosquejar el espectro de la señal transmitida.

(c) Hallar las componentes de señal y de ruido a la entrada del comparador en el receptor.

(d) Dar una expresión para la máxima distancia a la que se pueden detectar los símbolos con una probabilidad de error $P_e \leq P$.

Con la llegada de un nuevo ingeniero al equipo de trabajo, se decide cambiar la modulación pasabanda a QPSK.

(e) Dibujar la constelación utilizada antes y después de la llegada del ingeniero.

(f) Estimar el nuevo ancho de banda B'_T y la nueva tasa de transferencia de bits. Comparar la eficiencia espectral con la del caso anterior.

(g) Comparar la probabilidad de error de símbolo P_s y de bit P_e con el caso anterior.

Problema 2 [20 pts.]

Una señal analógica normalizada $x(t)$ con autocorrelación $R_x(\tau) = \frac{1}{2}\text{sinc}^2(\frac{1}{2}W_x\tau)$, donde $W_x = 10$ kHz, se transmitirá utilizando un método de modulación digital bandabase. El canal tiene una atenuación L en potencia e introduce un ruido AWGN con densidad espectral de potencia $\frac{1}{2}\eta$. La frecuencia de muestreo se elige $f_s = 2 \times f_N$, siendo f_N la mínima frecuencia de muestreo válida. Se utilizará cuantificación uniforme, señalización polar y pulso de conformación rectangular sin retorno a cero. En la recepción se utilizará un filtro pasabajos de ancho de banda B_T. Se requiere una SNR_D de 50 dB, utilizando la menor potencia de transmisión posible.

Primero se evaluará un sistema PCM binario.

(a) Dar el diagrama de bloques del trasmisor y receptor de un sistema PCM binario. Explicar la función de cada uno de los bloques.

(b) Bosquejar la SNR_D en función de la SNR_R, paramétrico en el número de niveles q. Indicar y justificar el punto de trabajo óptimo.

(c) Determinar el mínimo número de niveles necesarios q.

(d) Determinar el ancho de banda B_T mínimo necesario.

(e) Determinar la potencia de transmisión S_T mínima necesaria. Hallar su valor para $L = 5$ y $\eta = 10^{-7}$ Watts/Hz

Ahora se evaluará un sistema DPCM con un predictor de un retardo.

(f) Determinar el valor óptimo del coeficiente de predicción.

(g) Determinar el mínimo número de niveles necesarios q'.

(h) Determinar el ancho de banda B'_T mínimo necesario.

Pregunta [10 pts.]

(a) Explicar qué es la interferencia intersimbólica (ISI) en un sistema de comunicación digital.

(b) Indicar en un diagrama de bloques de un sistema de transmisión de pulsos en banda base el punto en el que se observa este fenómeno.

(c) Dar las condiciones que debe cumplir el pulso conformador para evitar la ISI.

(d) Indicar qué pulsos cumplen dichas condiciones. Comentar la variación del ancho de banda de dichos pulsos con el coeficiente de rolloff (ρ).

Solución

Problema 1

(a) Ver teórico.

(b) La señal conformada x_c es de la forma,

$$x_c(t) = \sum_k a_k \cos(\omega_c t + \phi)p(t) = \left[\sum_k a_k p(t)\right] \cos(\omega_c t + \phi) = x_a(t)\cos(\omega_c t + \phi)$$

donde ϕ es la fase aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2\pi]$, $p(t)$ es un pulso rectangular de duración $T = 1/r$ y a_k es una secuencia binaria equiprobable que toma los valores A y -A.
El espectro del proceso x_c está dado por,

$$G_c(f) = \frac{1}{4}(G_a(f - f_c) + G_a(f + f_c))$$

mientras que el espectro de $x_a(t)$ se obtiene utilizando la conocida fórmula para el espectro de una señal PAM. En este caso la secuencia a_k tiene media nula y varianza A^2 por lo que se tiene que,

$$G_a(f) = A^2 r|P(f)|^2 = \frac{A^2}{r} sinc^2\left(\frac{f}{r}\right)$$

Para estimar el ancho de banda necesario el criterio de mantener más del 90 % de la energía corresponde con eliminar el espectro fuera del primer cero del $sinc^2$ y se tiene que $B_T = 2r$, por otro lado el criterio de poder detectar el pulso corresponde a cortar el $sinc^2$ en la mitad de su lóbulo principal y el ancho de banda en ese caso sería $B_T = r$.

(c) La señal recibida está dada por,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{L(x)}}\left[\sum_k a_k p(t)\right] \cos(w_c t + \phi) + n_A(t)$$

donde $n_A(t)$ es el ruido que se introduce en el receptor, y $L(x)$ es la atenuación sufrida por la señal en el canal. Como estamos en el caso de señalización polar equiprobable, tenemos que la probabilidad de error está dada por,

$$P_e = Q\left(\frac{|\hat{a}_1 - \hat{a}_0|}{2\sigma}\right)$$

donde los $\hat{a}_i$ son los valores que tomaría la señal en el instante de muestreo en ausencia de ruido y σ es la varianza del ruido luego del integrador. Calcularemos primero los valores $\hat{a}_i$. Notar que dada la señalización estos toman valores opuestos, por lo que solo se calculará uno de ellos. Si la miramos en un intervalo del tipo $[kT,(k+1)T]$ el valor de $\hat{a_1}$ queda dado por:

$$\hat{a_1} = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{2A}{\sqrt{L(x)}} \cos^2(w_c t + \phi)\, dt = \frac{AT}{\sqrt{L(x)}}$$

ya que f_c es múltiplo de r. Ahora es necesario hallar la potencia del ruido en el instante de muestreo luego del integrador. Este está dado por:

$$N[k] = \int_{kD}^{(k+1)D} n_A(t)\cos(\omega_c t) dt.$$

De esto se puede ver que el ruido $N[k]$ es gaussiano pues es combinación lineal de variables aleatorias gaussianas. Además es inmediato ver que tiene media nula. Su potencia está dada por,

$$\mathbf{E}\left(N^2[k]\right) = \int_{kT}^{(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} R_{nA}(t-t')\cos(\omega_c t)\cos(\omega_c t')\, dt dt'.$$

Pero sabemos que $R_{nA}(\tau) = \eta_A \delta(\tau)$, de modo que

$$\mathbf{E}\left(n_A^2[k]\right) = \sigma^2 = \eta_A T$$

con lo que el proceso $N[k]$ queda caracterizado. Sustituyendo en la ecuación de la probabilidad de error tenemos,

$$P_e = Q\left(\frac{\frac{2AT}{\sqrt{L(x)}}}{2\sqrt{\eta_A T}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{\eta_A L(x)}}\right).$$

Del modelo de canal sabemos que $L(x) = L^x$
Sustituyendo estas fórmulas en la ecuación de arriba obtenemos la expresión buscada

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{\eta_A L^x}}\right).$$

La probabilidad de error puede también hallarse a partir de la fórmula,

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta_A}}\right)$$

con

$$E_b = \int_0^T \left(\frac{A}{\sqrt{L(x)}}\cos(w_c t)\right)^2 dt = \frac{A^2 T}{2L(x)}$$

(d) En el punto x que buscamos se cumple que $P_e = P$, por lo que usando el resultado de la parte anterior y buscando el inverso de $P = Q(K)$ tenemos que,

$$K = Q^{-1}(P) = \sqrt{\frac{A^2T}{\eta_A L^x}}$$

La distancia máxima se halla despejando x en:

$$L^x = \frac{A^2T}{\eta_A K^2}$$

Sabiendo que la relación entre la distancia l y x es $x = \frac{l}{d}$ se tiene:

$$l_{max} = d \cdot \log_L \left(\frac{A^2T}{\eta_A K^2} \right)$$

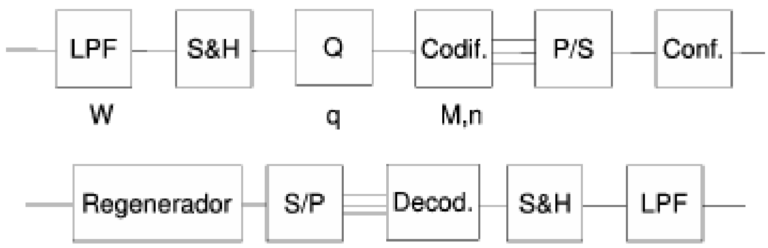
(e) Dos puntos y cuatro puntos.

(f) El ancho de banda es el mismo, $B'_T = B_T$. La tasa de transferencia es el doble $r' = 2r$, por lo que la eficiencia espectral se duplica.

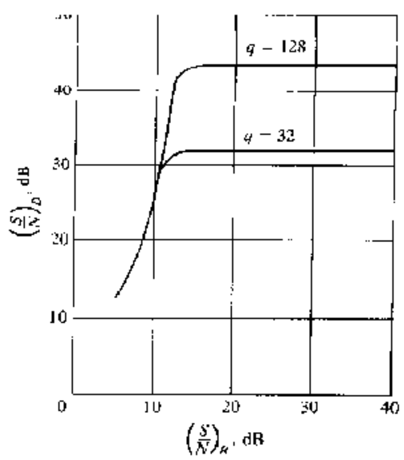
(g) En el caso anterior $P_s = P_e$. La P_e es la misma, la P_s es el doble.

Problema 2

(a)



(b)



Se trabaja antes de la curva cuando la SNR_D es constante. En esta zona se tiene menor potencia de transmisión y la misma SNR_D que con potencias de trasmisión mayores (sin aumentar la SNR_D).

(d)

$$SNR_D = 3q^2\frac{f_s}{2W} = 6q^2 \geq 50\,dB$$

$$q = 2^n \geq \sqrt{\frac{10^5}{6}} = 129$$

$$\Rightarrow q = 256 \Rightarrow n = 8$$

$$B_T \geq n\frac{f_s}{2} \Rightarrow B_T = 80\,kHz$$

(e)

$$P_e \ll \frac{1}{4q^2} = \frac{1}{4q^2} = 3.81 \times 10^{-6}$$

$$P_e = Q(\sqrt{SNR_R}) \leq 3.81 \times 10^{-7} \Rightarrow SNR_R \geq (4.9)^2$$

$$SNR_R = \frac{S_T}{\eta L B_T} \Rightarrow S_T = SNR_R \cdot \eta L B_T$$

$$S_{T_{min}} = 960.4 \text{ mW}$$

(f) $x[k] = ax[k-1]$ con $a = \rho_x[1] = \frac{R_x[1]}{R_x[0]}$. $R_x[0] = \frac{1}{2}$ y $R_x[1] = 0.475$, por lo tanto $a = 0.95$.

(g) La nueva condición es $SNR_D \geq 10^5/G_P$ donde

$$G_P = \frac{1}{1-\rho_x^2[1]}$$

Con $\rho_x[1] = 0.95$ queda $G_P \approx 10.3$ y despejando q' se llega a:

$$q' = 2^{n'} \geq \sqrt{\frac{10^5}{6G_P}} \approx 40$$

$$\Rightarrow q' = 64 \Rightarrow n' = 6$$

(h)

$$B_T' \geq n'\frac{f_s}{2} \Rightarrow B_T' = 60\,kHz$$