Sistemas de Comunicación
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

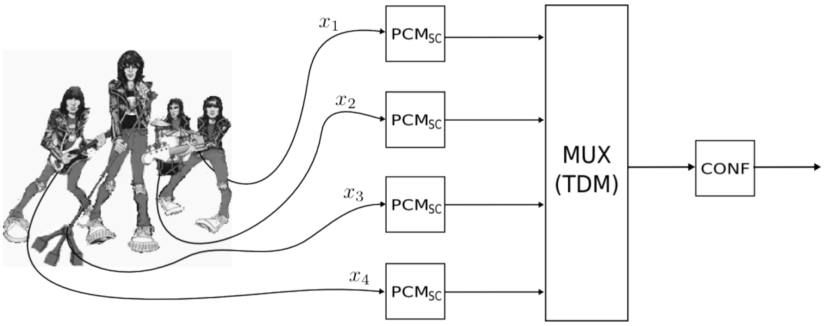
Viernes 8 de julio de 2011

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [25 pts.]

Se propone un sistema de comunicación (ver figura) para transmitir cuatro señales de audio que corresponden a una banda musical grabada en cuatro canales independientes: voz, guitarra, bajo y batería. Las señales $x_i(t)$ con $i = \{1, 2, 3, 4\}$ tienen todas rango dinámico [-1,1], potencia $S_x = 1/2$ y ancho de banda $W_x = 20$ kHz. Se utiliza una frecuencia de muestreo f_s a determinar.



PCM$_{sc}$: PCM binario de q niveles (n bits), con cuantificación uniforme sin el bloque conformador.
CONF: bloque conformador.

(a) Dar el diagrama de bloques del sistema PCM$_{sc}$ y el diagrama de bloques del receptor para el sistema propuesto.

Se considera que los bits son independientes y equiprobables y se codifican utilizando señalización polar y un pulso conformador rectangular de ancho T. El canal tiene atenuación L (en potencia) y ancho de banda $B_C = 700$kHz, e introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo, gaussiano, con una densidad espectral de potencia $\eta/2$. En el instante de muestreo la amplitud de la señal recibida es A_R. Se desea recibir cada señal con la máxima SNR$_D$ posible.

(b) Diseñar los parámetros del sistema (q, n, frecuencia de muestreo f_s, ancho de los pulsos T) para cumplir los requerimientos indicados. Dar los criterios de elección utilizados. Calcular la SNR$_D$ obtenida.

(c) Calcular la densidad espectral de potencia de la señal conformada. Esbozar.

(d) ¿El pulso conformador cumple con los criterios para que no exista interferencia intersimbólica? ¿Por qué?

(e) Diseñar la etapa de recepción para minimizar la P_e. Dibujar el diagrama del receptor elegido y dar el umbral óptimo justificando su elección.

(f) Bosquejar la SNR_D en función de SNR_R indicando la zona de trabajo óptima. Justificar.

(g) Determinar la mínima SNR_R para que la SNR_D de cada una de las señales PCM sea independiente del ruido introducido en el canal.

(h) Determinar la amplitud de la señal transmitida A_T y la potencia de transmisión S_T.

Problema 2 [25 pts.]

Se dispone de una línea telefónica para transmitir información digital a una tasa r_b baudios (bps); la banda útil de la línea se encuentra entre 300 Hz y 3 kHz. La tasa de transferencia de información debe ser de la forma $r_b = 2^N r_0$ con $r_0 = 2400$ baudios y N entero. Para la transmisión se utilizará un pulso de Nyqvist de la familia del coseno elevado.
La señal es contaminada en el canal con ruido aditivo, gaussiano, blanco de densidad espectral de potencia $\frac{1}{2}\eta$. Para la recepción se utilizará un receptor coherente.
Se analizará el uso del espectro y la velocidad de transmisión para QPSK, 8-PSK y 16-QAM.

Para cada una de las modulaciones propuestas:

(a) Dibujar la constelación correspondiente.

(b) Hallar la máxima tasa de transferencia r_b.

(c) Hallar el rango de valores de ρ (coeficiente de roll-off) posibles para la r_b hallada en (b).

(d) Esbozar el espectro del pulso para el ρ máximo y mínimo hallados en (c).

(e) Explicar cómo afecta la elección de ρ en caso de un error de sincronismo. ¿Cuál es el ρ que debería elegir para minimizar dicho error?

Para el caso de QPSK:

(f) Dar un diagrama de bloques del transmisor (MO-) y del receptor (-DEM).

(g) ¿Cómo son las señales temporales transmitidas en fase y en cuadratura?

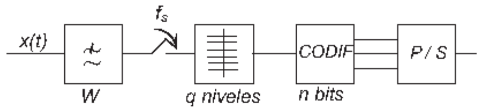
(h) Determinar la energía de bit E_b para transmitir con una probabilidad de error menor a 10^{-5} con $\eta = 4 \times 10^{-6}\mathrm{W/Hz}$.

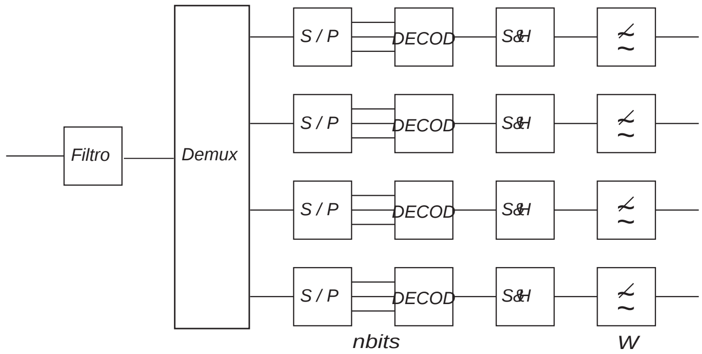
(i) ¿Cómo cambia la respuesta a la parte (g) en el caso de utilizar modulación 16-QAM?

Solución

Problema 1

(a)





(b) Asumiremos que estamos trabajando sobre el umbral PCM. Se busca maximizar la SNR_D cuya expresión es:

$$\text{SNR}_D = 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W}$$

sujeto a las restricciones de ancho de banda del canal y frecuencia de Nyquist, $f_s \geq 2W_x$ y $\frac{r}{2} = \frac{1}{2T} \leq B_C$.

Dado el esquema de transmisión propuesto se tiene que T debe ser menor que $\frac{1}{4nf_s}$, por lo que combinando ambas ecuaciones queda:

$$4nW_x \leq B_C$$

Se observa que, para maximizar la SNR_D, n debe ser el mayor entero que cumple dicha condición, por lo que se llega a:

$$n = 8 \Rightarrow q = 2^n = 2^8 = 256$$

Por otro lado, una vez hallado n podemos calcular la f_s que maximiza la SNR_D, la cual también debe ser máxima sujeta a la condición $4nf_s/2 \leq B_C$, de donde se obtiene:

$$f_s = 43750 \text{ Hz}$$

Con los valores hallados se obtiene el ancho del pulso y la SNR_D máxima:

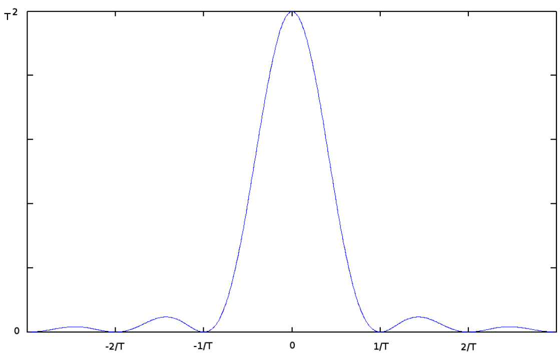
$$T = \frac{1}{4nf_s} = 0.714 \ \mu s$$

$$\text{SNR}_D = 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W} \approx 50 \text{ dB}$$

(c) La señal conformada, $x_c(t)$, es una señal PAM con pulso conformador $s(t)$. La secuencia de bits $x[k]$ tiene media nula por ser los bits equiprobables, por lo que su espectro es de la forma:

$$G_{x_c}(f) = \frac{\sigma_x^2 |S(f)|^2}{T}$$

con $\sigma_x^2 = R_x[0] = A^2$ y $|S(f)|^2 = T^2 sinc^2(fT)$.
Esta función tiene la forma:

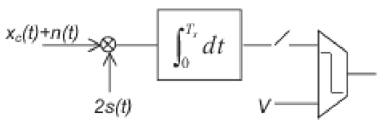


(d) Para que no haya interferencia intersimbólica, deben cumplirse las siguientes condiciones:

- $s(0) = 1$.
- $s(kT) = 0$ con k entero no nulo.
- $S(f) = 0 \; \forall |f| \geq B_T$.

Esta última condición no se cumple, por lo que la respuesta es no.

(e) Como $p = 1/2$ podemos elegir tanto filtro apareado como receptor de correlación. En este caso vamos a utilizar un receptor de correlación. Por lo tanto, en recepción se tendrá algo de la forma:



El umbral óptimo en este caso es $V_T = 0$ puesto que los bits son equiprobables y la señalización es polar (A, -A).

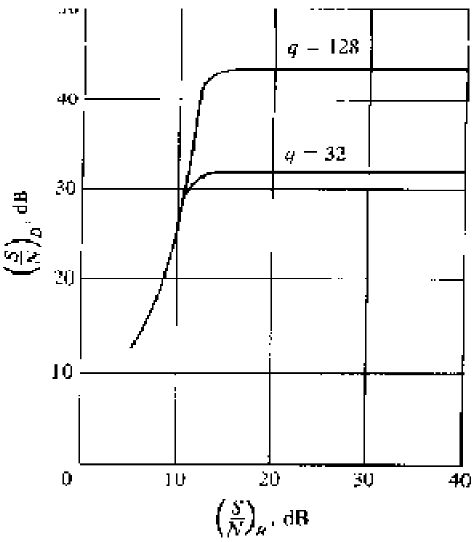
(f) Sabemos que, dependiendo del valor de P_e, el ruido de decodificación será más o menos relevante que el de cuantificación. Más específicamente, se tiene que:

$$\text{SNR}_D = \frac{3q^2 S_x}{\frac{2W}{f_s} + 4q^2 P_e}$$

Luego, dependiendo de la relación entre P_e y $\frac{2W}{4q^2 f_s}$, el valor de SNR_D será diferente. Así, se cumple:

- Si $P_e \ll \frac{2W}{4q^2 f_s}$, $\text{SNR}_D \approx \frac{3q^2 S_x f_s}{2W}$, independiente de la SNR_R.
- Si $P_e \gg \frac{2W}{4q^2 f_s}$, $\text{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{4P_e}$. Como $P_e = Q(\sqrt{\text{SNR}_R})$ (ya que se está trabajando con señalización polar y símbolos equiprobables), entonces se cumple que $\text{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{Q(\sqrt{\text{SNR}_R})}$.

En base a estas observaciones, podemos bosquejar la forma de SNR_D variando respecto a SNR_R:



La zona de trabajo óptima se tiene justo en el umbral, es decir, cuando $\text{SNR}_R \approx 18.5$.

(g) Pedir que cada SNR_D sea independiente del ruido introducido en el canal, equivale a pedir que el único ruido relevante en cada señal sea el de cuantificación (o sea, que el ruido de decodificación no sea importante). Para que esto ocurra, un criterio razonable es pedir que $P_e \leq 10^{-5}$. Como la probabilidad de error en cada señal PCM es $P_e = Q(A_R/\sqrt{\eta B_T})$, entonces, deberá cumplirse:

$$Q\left(\frac{A_R}{\sqrt{\eta B_T}}\right) \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{A_R}{\sqrt{\eta B_T}} \geq 4.3$$

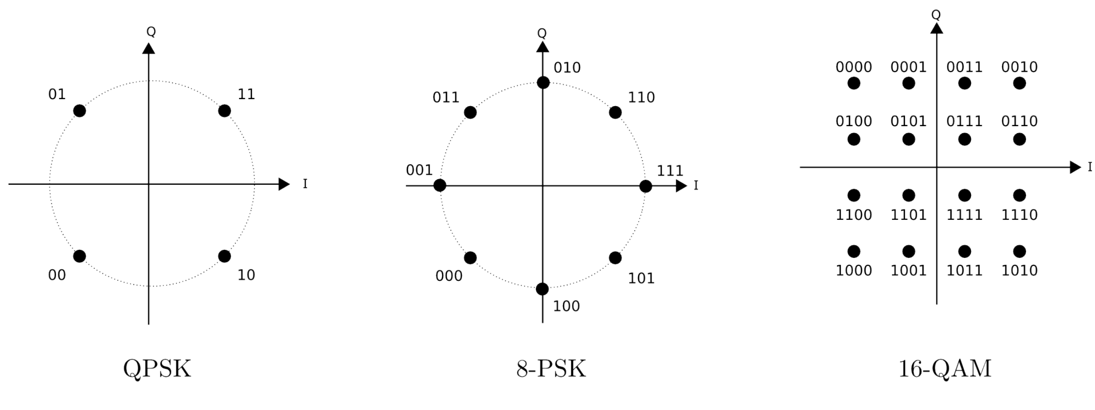
Como $\text{SNR}_R = \frac{A_R^2}{\eta B_T}$, luego el valor de $\text{SNR}_{R_{mín}}$ será:

$$\text{SNR}_{R_{mín}} = (4.3)^2 \approx 18.5$$

(h) Como $\text{SNR}_R = \frac{A_R^2}{\eta B_T}$, entonces se debe cumplir que $A_R = \sqrt{18.5\eta B_T}$. A su vez, $A_R = A_T/\sqrt{L}$, y entonces $A_T = \sqrt{18.5\eta B_T L}$. La potencia de transmisión es $S_T = A_T^2 T$.

Problema 2

(a) Las constelaciones son las siguientes:



QPSK 8-PSK 16-QAM

(b) Para todos los casos vale

$$B_T = r_s(1+\rho)$$

donde $r_s = \frac{1}{M} r_b$ y

$$M = \begin{cases} 2 & \text{QPSK} \\ 3 & \text{8-PSK} \\ 4 & \text{16-PAM} \end{cases}$$

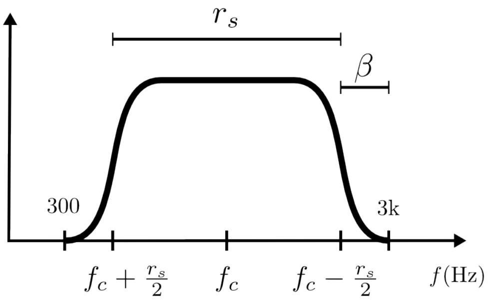
Además $r_b = 2^N r_0 = 24002^N$ con N natural y $0 \le \rho \le 1$. Buscamos el N más grande en cada caso.

$$N = \begin{cases} 1 & \text{QPSK} \\ 1 & \text{8-PSK} \\ 2 & \text{16-PAM} \end{cases}$$

(c) Se desprende de las desigualdades anteriores.

$$\rho \in \begin{cases} [0, 0.125] & \text{QPSK} \\ [0, 0.6875] & \text{8-PSK} \\ [0, 0.125] & \text{16-PAM} \end{cases}$$

(d) La forma genérica, para un $\rho \neq 0$, del espectro de los pulsos es



La frecuencia central es $f_c = \frac{1}{2}(300 + 3000) = 1650$ Hz. Para el ρ mínimo ($\beta = 0 = \rho$) el espectro es

$$\Pi\left(\frac{f \pm f_c}{r_s}\right).$$

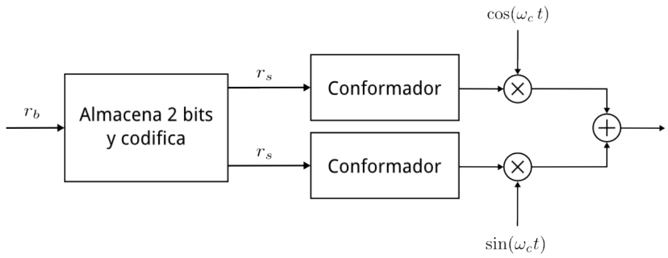
(e) Ver teórico de Pulsos de Nyqvist e ISI. Debemos elegir el ρ más grande posible, de esta forma podemos obtener un pulso que caiga más rápido que el sinc (con $\rho = 0$).

(f) El diagrama de bloques es

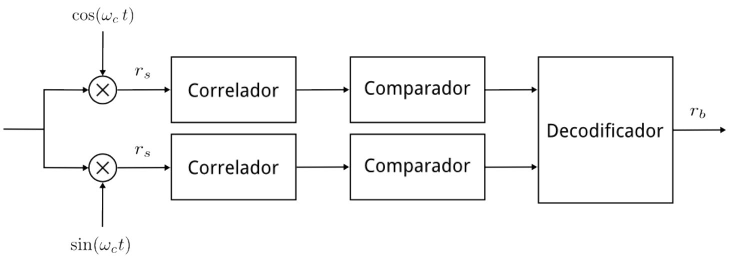
(g) Cada señal (en fase y cuadratura) es onda binaria aleatoria polar conformada con el pulso de Nyqvist seleccionado (por ρ). Esto es, un bit en fase y otro en cuadratura que generan la señal cuaternaria.

(h) Se desea obtener una probabilidad de error de $Pe_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \le 10^{-5}$. Eso equivale a tener $\sqrt{2E_b/\eta} \ge 4.3 \Rightarrow E_b \ge 9.245\eta = 3.7 \times 10^{-5}$.

(i) Cada señal (en fase y cuadratura) es una señal onda cuaternaria aleatoria, es decir, dos bits en fase y dos bits en cuadratura, que definen las amplitudes de los pulsos conformados.



MOdulador



DEModulador