Sistemas de Comunicación
Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

7 de julio de 2010

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [10 pts.]

Se tiene una fuente S_1 de cuatro símbolos con probabilidades $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10})$. Se quiere codificar la fuente S_1 para luego transmitirla por un sistema de comunicación.

(a) Hallar un código de Huffman binario C_1 para la fuente S_1 y calcular su largo medio $L(C_1)$.

(b) Se tiene como alternativa emplear el siguiente código $C_2 = (00, 01, 10, 11)$. ¿Cuál de los dos códigos conviene utilizar? Justificar.

(c) Mostrar que el código C_1 hallado en (a) es óptimo para una fuente S_2 también de cuatro símbolos con probabilidades $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$.

Problema 1 [15 pts.]

Se necesita transmitir información digital a una tasa $r_b = 2500$ bits/seg por una línea telefónica. La banda útil de la línea se encuentra entre 300 Hz y 3 kHz. La señal es contaminada en el canal con ruido aditivo, gaussiano, de densidad espectral de potencia $\frac{\eta}{2} = 2 \times 10^{-6}$ W/Hz. Para la recepción se utilizará un receptor coherente.

(a) Para realizar la transmisión, se evalúa un sistema de modulación ASK binario y otro QPSK. Dadas las características del canal, comparar la performance de los dos sistemas propuestos.

(b) Para el sistema que permita transmitir con menor potencia, diseñar el módem transmisor y receptor de manera que se minimicen los efectos de ISI y se logre transmitir con una probabilidad de error menor a 10^{-5}. Especificar todos los parámetros del sistema.

Problema 2 [25 pts.]

Una señal de voz $x(t)$ de rango dinámico [-1,1], potencia S_x y ancho de banda $W = 3,4$ kHz es muestreada a una frecuencia $f_s = 8$ kHz.

(a) Dar el diagrama de bloques del transmisor (TX) y receptor (RX) de un sistema PCM binario de q niveles (n bits), con cuantificación uniforme.

Se desea recibir la señal con una SNR_D dada, teniendo la mínima potencia de ruido de cuantificación posible.

(b) Determinar los parámetros de funcionamiento del sistema (q, n, ancho de banda de transmisión B_T). Dar criterios de elección de los mismos.

Se codifica la fuente binaria utilizando señalización polar y un pulso conformador rectangular de ancho $T = 1/(nf_s)$. La probabilidad de transmitir un '1' es p. El canal introduce ruido que se puede modelar como blanco, aditivo, gaussiano, con una densidad espectral de potencia $\eta/2$. En el instante de muestreo la amplitud de la señal recibida es A_R.

(c) Esbozar el espectro de la señal conformada para una probabilidad p genérica. ¿Cómo afecta p la forma del espectro?

(d) ¿El pulso conformador cumple con los criterios para que no exista Interferencia Intersimbólica? ¿Por qué?

(e) Determinar la entropía de la fuente y hallar la probabilidad p que la maximiza.

(f) Diseñar la etapa de recepción para minimizar la probabilidad de error P_e, para p cualquiera.

De aquí en adelante se utilizará la p hallada en (e).

(g) ¿Cómo cambiaría el diseño del receptor si el ruido no es blanco y tiene una $G_n(f)$ dada? Interpretar el resultado.

(h) Determinar la mínima SNR_R para que la SNR_D sea independiente del ruido introducido en el canal. Justificar la respuesta indicando el criterio utilizado.

(i) Bosquejar la SNR_D en función de SNR_R indicando la zona de trabajo óptima. Determinar A_R para trabajar en esa zona. Si la atenuación del canal es L (en potencia), determinar A_T (amplitud de la señal enviada).

Solución

Pregunta

(a) Un posible código de Hufman para la fuente S es

$$(a, b, c, d) \mapsto (0, 10, 110, 111).$$

El cual se calculó siguiendo el algoritmo propuesto por Huffman, ver teórico. El largo medio para este código es,

$$L = \sum_x p(x)l(x) = \frac{3}{5} + 2\frac{1}{5} + 3\frac{1}{10} + 3\frac{1}{10} = 1,6.$$

(b) El largo medio que se obtiene de codificar la fuente S_1 utilizando el código $(00, 01, 10, 11)$ es 2, ya que todos los símbolos se codifican con palabras de ese largo.
El código de Huffman cumple la propiedad de minimizar el largo medio dada una fuente, como se verifica numéricamente. Por otro lado, dicho código es instantáneo, esto quiere decir que cada palabra puede decodificarse al momento en que se recibe.

(c) El código de Huffman para la fuente S_2 es igual al código para la fuente S_1 (por construcción). Para S_2 además el largo medio es igual a la entropía de la fuente, cumpliendo con la cota del primer Teorema de Shannon por lo cuál es óptimo.

Problema 1

(a) El ancho de banda del canal es de 2700 Hz. El espectro de la modulación elegida debe poder entrar en dicho ancho de banda pasabanda. El ancho de banda de la modulación ASK es $(1+\rho)r_b$. Como la tasa de datos es $r_b = 2500$ bits/seg, el ancho de banda mínimo requerido para ASK es 2500 Hz. Para el caso de QPSK se envían 2 bits por símbolo, entonces la cadencia de símbolos debe ser la mitad, entonces el ancho de banda mínimo necesario es 1250 Hz.
Para el caso de ASK la probabilidad de error de bit es:

$$P_{e_b} = P_{e_s} = P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

siendo $E_b = \frac{S_x}{r_b}$ si asumimos equiprobabilidad.

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{S_x}{r_b \eta}}\right)$$

Para el caso de QPSK, la probabilidad de error de símbolo es:

$$P_{e_s} = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right)$$

Donde $E_s = 2E_b = \frac{2S_x}{r_b}$ Entonces

$$P_{e_b} = \frac{1}{2}P_{e_s} = Q\left(\sqrt{\frac{2S_x}{r_b \eta}}\right)$$

A igual potencia transmitida la probabilidad de error es menor para QPSK y también el ancho banda necesario es menor.

(b) Por lo que vimos en la parte anterior es más eficiente QPSK. Para que los efectos de ISI se minimicen utilizaremos pulsos de Nyqvist. El coeficiente de rolloff máximo admisible puede ser calculado de:

$$(1+\rho)\frac{r_b}{2} \leq 2700 \Rightarrow \rho = \frac{1250}{1250} = 1$$

El pulso utilizado en la conformación podría ser por ejemplo de coseno elevado:

$$p(t) = \frac{\cos(2\pi\frac{\rho r_b}{2}t)}{1-(4\frac{\rho r_b}{2}t)^2}\mathrm{sinc}\,(r_b t)\,.$$

Se desea obtener una probabilidad de error de $Pe_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) \leq 10^{-5}$. Eso equivale a tener $\sqrt{2E_b/\eta} \geq 4.3 \Rightarrow E_b \geq 9.245\eta = 9.245 \times 4 \times 10^{-6}$. Donde la potencia de la señal corresponde a la energía de bit sobre el tiempo de bit, es decir

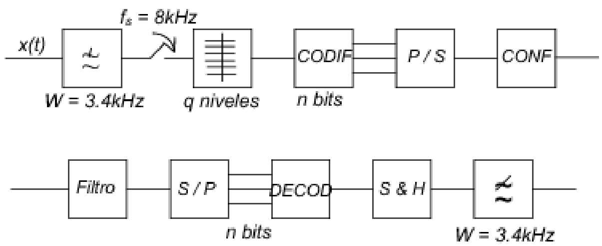
$$S_x = E_b r_b \geq 0.09245\ W.$$

La frecuencia de modulación es

$$f_c = \frac{3000\text{Hz} + 300\text{Hz}}{2} = 1650\text{Hz}.$$

Problema 2

(a)



(b) Asumiremos que estamos trabajando sobre el umbral P.C.M.Para poder garantizar un valor dado de SNR_D (que tomaremos igual a SNR_D^*), se deberá cumplir que:

$$\mathrm{SNR}_D^* \leq 3q^2 S_x \frac{f_s}{2W} \Rightarrow q \geq \sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D^*}{3S_x}.\frac{2W}{f_s}}$$

A su vez, para que la potencia del error de cuantificación sea mínima, es necesario que el valor de n sea el mínimo posible. Recordando que debe cumplirse también que $q \leq 2^n$, luego se tiene que:

$$n \geq \log_2(q) = \log_2\left(\sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D^*}{3S_x}.\frac{2W}{f_s}}\right)$$

Dado que n debe ser un número natural, se desprende que el valor de n es $\left\lceil \log_2\left(\sqrt{\frac{\mathrm{SNR}_D^*}{3S_x}.\frac{2W}{f_s}}\right)\right\rceil$. Finalmente, también debe cumplirse que $B_T \geq (n\ f_s)/2$ (lo cual permite asegurar que no se tendrá Interferencia Intersimbólica conformando con un pulso de Nyqvist adecuado). Tomando el mínimo valor de B_T que cumple esto, se tiene entonces que $B_T = (n\ f_s)/2$, donde n es el calculado más arriba.

(c) La señal conformada, $x_c(t)$, es una señal PAM, por lo que su espectro es de la forma:

$$G_{x_c}(f) = \frac{\sigma_x^2 |S(f)|^2}{T} + \frac{m_x^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| S\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

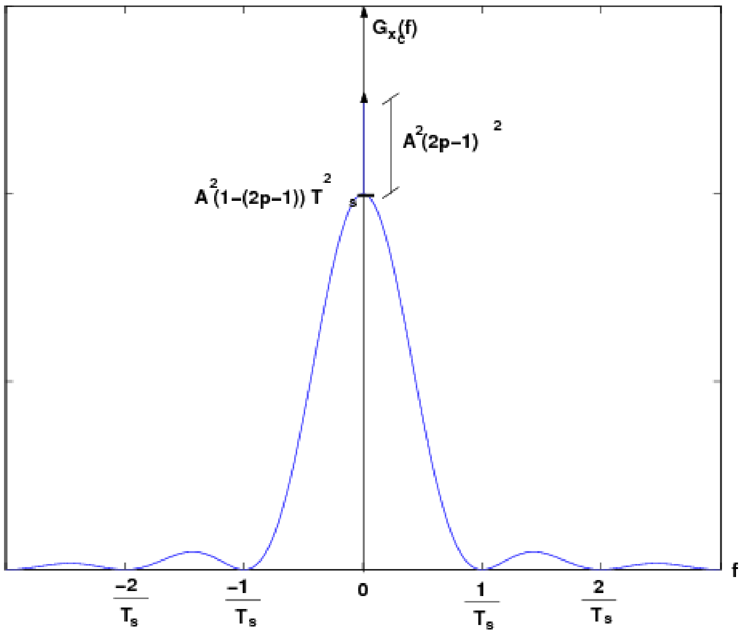
donde:

$$m_x = A.p + (-A).(1-p) = A.(2p-1)$$
$$\sigma_x^2 = R_x[0] - m_x^2 = A^2.p + (-A)^2.(1-p) - A^2(2p-1)^2 = A^2(1-(2p-1)^2)$$
$$|S(f)|^2 = T^2 sinc^2(fT)$$

De la forma de $|S(f)|^2$ se desprende que $|S(k/T)|^2 = T^2$ si $k = 0$, y $|S(k/T)|^2 = 0$ en otro caso (considerando k entero). Por lo tanto, la densidad espectral de potencia de la señal conformada queda:

$$\begin{aligned} G_{x_c}(f) &= \frac{A^2(1-(2p-1)^2)}{T} T^2 sinc^2(fT) + \frac{A^2(2p-1)^2}{T^2} T^2 \delta(f) \\ &= A^2(1-(2p-1)^2) T sinc^2(fT) + A^2(2p-1)^2 \delta(f) \end{aligned}$$

Esta función tiene la forma:



El valor de p afecta a los valores de m_x y σ_x. Específicamente, si $p = 1/2$, entonces $m_x = 0$ y no se tiene una delta en $f = 0$ en el espectro, la cual no aportaba información. Esto es deseable ya que permite ahorrar potencia de transmisión, que antes era emitida pero no aprovechada. Con este valor de p, $G_{x_c}(f) = A^2 T sinc^2(fT)$.

(d) Para que no haya Interferencia Intersimbólica, deben cumplirse las siguientes condiciones:

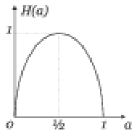
- $s(0) = 1$.
- $s(kT) = 0$ con k entero no nulo.
- $S(f) = 0 \ \forall |f| \geq B_T$.

Esta última condición no se cumple, por lo que la respuesta es no.

(e) La entropía de la fuente es:

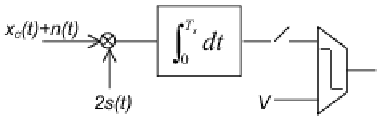
$$H(A) = \sum_{i=1}^{2} p_i.I_i = \sum_{i=1}^{2} p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) = p\log_2\left(\frac{1}{p}\right) + (1-p)\log_2\left(\frac{1}{1-p}\right) = \Omega(p)$$

donde $i = 1,\ 2$ representa a los dos símbolos ('0' y '1') que emite la fuente.
La forma de $\Omega(p)$ es:



Se puede ver que presenta un máximo en $p = 1/2$.

(f) Como p es genérico es necesario utilizar un Filtro de Correlación. Por lo tanto, en recepción se tendrá algo de la forma:



(g) Como $p = 1/2$, el filtro de correlación de la parte anterior se puede implementar mediante un filtro apareado, de la forma $H(f) = k.S^*(f).e^{-j2\pi f t_d}$, donde k es una constante arbitraria y t_d es elegido de forma tal que el filtro sea causal (en este caso, debe cumplirse $t_d \geq T$).
Si ahora el ruido es gaussiano pero no blanco, el filtro queda de la forma $H(f) = \frac{k'.S^*(f).e^{-j2\pi f t_d}}{G_n(f)}$.
Se puede apreciar que este filtro realiza un de-énfasis en aquellas frecuencias en las que está presente el ruido, mientras que enfatiza las frecuencias en las que está presente el pulso.

(h) Pedir que la SNR_D sea independiente del ruido introducido en el canal, equivale a pedir que el único ruido relevante sea el de cuantificación (o sea, que el ruido de decodificación no sea importante). Para que esto ocurra, un criterio razonable es pedir que $P_e \leq 10^{-5}$. Como $p = 1/2$, entonces el umbral óptimo será $V = (A_R - A_R)/2 = 0$, y $P_e = Q(A_R/\sqrt{\eta B_T})$. Entonces, deberá cumplirse:

$$Q\left(\frac{A_R}{\sqrt{\eta B_T}}\right) \leq 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{A_R}{\sqrt{\eta B_T}} \geq 4.3$$

Como $\text{SNR}_R = \frac{A_R^2}{\eta B_T}$, luego el valor de $\text{SNR}_{R_{mín}}$ será:

$$\text{SNR}_{R_{mín}} = 4.3^2 \approx 18.5$$

También valdría usar la aproximación: $\text{SNR}_{R_{mín}} = 6(m^2 - 1) = 18$, donde $m = 2$ pues se está trabajando con PCM binario.

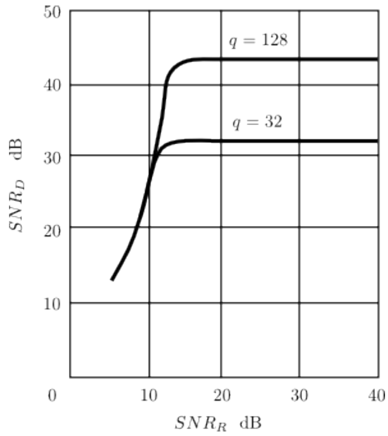
(i) Sabemos que, dependiendo del valor de P_e, el ruido de decodificación será más o menos relevante que el de cuantificación. Más específicamente, se tiene que:

$$\text{SNR}_D = \frac{3q^2 S_x}{\frac{2W}{f_s} + 4q^2 P_e}$$

Luego, dependiendo de la relación entre P_e y $\frac{2W}{4q^2 f_s}$, el valor de SNR_D será diferente. Así, se cumple:

- Si $P_e \ll \frac{2W}{4q^2 f_s}$, $\mathrm{SNR}_D \approx \frac{3q^2 S_x f_s}{2W}$, independiente de la SNR_R.
- Si $P_e \gg \frac{2W}{4q^2 f_s}$, $\mathrm{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{4P_e}$. Como $P_e = Q(\sqrt{\mathrm{SNR}_R})$ (ya que se está trabajando con señalización polar y símbolos equiprobables), entonces se cumple que $\mathrm{SNR}_D \approx \frac{3S_x}{4Q(\sqrt{\mathrm{SNR}_R})}$.

En base a estas observaciones, podemos bosquejar la forma de SNR_D variando respecto a SNR_R:



La zona de trabajo óptima se tiene justo en el umbral, es decir, cuando $\mathrm{SNR}_R \approx 18.5$. Como $\mathrm{SNR}_R = \frac{A_R^2}{\eta B_T}$, entonces se debe cumplir que $A_R = \sqrt{18.5\eta B_T}$. A su vez, $A_R = A/\sqrt{L}$, y entonces $A = \sqrt{18.5\eta B_T L}$.